Meßbare Mengen zu einem Äußeren Maß

Ist M eine Menge und μ ein äußeres Maß auf M, d.h. eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(M) \to [0,\infty]$ mit $\mu(\emptyset)=0$, $A\subset B \Rightarrow \mu(A)\leqslant\mu(B)$ (Monotonie) und $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$ (Subadditivität), so nennt man eine Menge $A\subset M$ μ-meßbar, wenn $\forall E\subset M:\ \mu(E)=\mu(E\cap A)+\mu(E\cap A^c)$.

$\boxed{\text{Die Menge } \mathfrak{A} \text{ der } \mu\text{-meßbaren Mengen ist eine } \sigma\text{-Algebra, und die Einschränkung von } \mu \text{ auf } \mathfrak{A} \text{ ist ein vollständiges Maß.}}$

Zu zeigen ist zunächst: $\emptyset\in\mathfrak{A}$, d.h. $\mu(E)=\mu(E\cap\emptyset)+\mu(E\cap\emptyset^c)$.
Diese Gleichung gilt aber wegen $\mu(E\cap\emptyset)=\mu(\emptyset)=0$ und $\mu(E\cap\emptyset^c)=\mu(E\cap M)=\mu(E)$.

Als nächstes ist zu zeigen: $A\in\mathfrak{A}\Rightarrow A^c\in\mathfrak{A}$.
Nun bedeutet $A\in\mathfrak{A}$, daß $\mu(E)=\mu(E\cap A)+\mu(E\cap A^c)$, was offenbar äquivalent ist zu $\mu(E)=\mu(E\cap A^c)+\mu(E\cap(A^c)^c)$, also zu $A^c\in\mathfrak{A}$.

Als nächstes zeigt man, daß der Durchschnitt zweier μ-meßbarer Mengen wieder μ-meßbar ist. Auch dabei wird die Subadditivität des äußeren Maßes noch nicht benutzt:

Seien also A,B μ-meßbar. Zu zeigen ist $A\cap B$ ist μ-meßbar, d.h.
$\mu(E)=\mu(E\cap A\cap B)+\mu(E\cap(A\cap B)^c)=\mu(E\cap A\cap B)+\mu(E\cap(A^c\cup B^c))$.

Zunächst folgt aus der μ-Meßbarkeit von A , daß
$\mu(E)=\mu(E\cap A)+\mu(E\cap A^c)$ und aus der μ-Meßbarkeit von B , daß
$\mu(E\cap A)=\mu(E\cap A\cap B)+\mu(E\cap A\cap B^c)$ sowie
$\mu(E\cap A^c)=\mu(E\cap A^c\cap B)+\mu(E\cap A^c\cap B^c)$, insgesamt also
$\mu(E)=\mu(E\cap A\cap B)+\mu(E\cap A\cap B^c)+\mu(E\cap A^c\cap B)+\mu(E\cap A^c\cap B^c)$.

Ebenso folgt aus der μ-Meßbarkeit von A , daß
$\mu(E\cap(A^c\cup B^c))=\mu(E\cap A^c)+\mu(E\cap A\cap B^c)$ und aus der μ-Meßbarkeit von B , daß
$\mu(E\cap A^c)=\mu(E\cap A^c\cap B)+\mu(E\cap A^c\cap B^c)$, insgesamt also
$\mu(E\cap(A^c\cup B^c))=\mu(E\cap A^c\cap B)+\mu(E\cap A^c\cap B^c)+\mu(E\cap A\cap B^c)$, so daß sich ergibt

$\mu(E)=\mu(E\cap A\cap B)+\mu(E\cap(A^c\cup B^c))$, was zu beweisen war.

Die Vereinigung zweier μ-meßbarer Mengen ist μ-meßbar, da sie gleich dem Komplement des Durchschnitts ihrer Komplemente ist. Via Induktion ist daher auch eine endliche Vereinigungen und endliche Durchschnitte meßbarer Mengen meßbar.

Sind A,B disjunkte Mengen und ist A μ-meßbar, so gilt
$\mu(A\cup B)=\mu\big((A\cup B)\cap A\big)+\mu\big((A\cup B)\cap A^c\big)=\mu(A)+\mu(B)$.
Induktiv erhält man, daß das äußere Maß einer endlichen disjunkten Vereinigung gleich der Summe der äußeren Maße der Einzelmengen ist, wenn nur eine von ihnen μ-meßbar ist!

Allgemeiner: Sind Teilmengen $E, A, B \subset M$ gegeben, wobei A,B disjunkt sind und A μ-meßbar, so hat man $\mu(E \cap (A \cup B)) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap B)$, wodurch per Induktion sofort folgt, daß $\mu\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E \cap A_i)$, wenn die A_i disjunkt sind und wenigstens eins von ihnen μ-meßbar!

Schließlich ist jetzt zu zeigen, daß eine abzählbare Vereinigung μ-meßbarer Mengen μ-meßbar ist.

Geht man dabei aus von einer Familie $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und setzt $A_1 := B_1$ und $A_{n+1} := B_{n+1} - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, so ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, und man kann ausnutzen, daß die (A_n) paarweise disjunkt sind.

Zu zeigen ist also $\mu(E) = \mu\left(E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) + \mu\left(E \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c\right)$.

Dies ist trivial, wenn $\mu\left(E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \infty$, denn dann sind beide Seiten der Gleichung unendlich.

Gehen wir also im Folgenden aus von $\mu\left(E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$:

Wir können ausschließen, daß $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap A_n) = \infty$, denn dann gäbe es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mu\left(E \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E \cap A_n) > \mu\left(E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ – wobei wir in der ersten Gleichung die oben gezeigte endliche Additivität benutzen – und wir haben einen Widerspruch zur Monotonie des äußeren Maßes.
Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap A_n)$ ist also konvergent, daher gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap A_n) \leqslant \epsilon + \sum_{i=1}^{n} \mu(E \cap A_i)$. Dann hat man:

$$\mu\left(E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E \cap A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap A_n) \leqslant \epsilon + \sum_{i=1}^{n} \mu(E \cap A_i) = \epsilon + \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E \cap A_i\right) \leqslant \epsilon + \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E \cap A_i\right)$$

Dabei gilt die erste Ungleichung auf Grund der Subadditivität und die letzte auf Grund der Monotonie des äußeren Maßes, und es wird auch wieder die oben gezeigte endliche Additivität benutzt.

Aus dieser Ungleichungskette folgt unmittelbar $\mu\left(E \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E \cap A_i)$. Diese Gleichung gilt übrigens auch für den Fall $\mu\left(E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \infty$, denn sie folgt dann direkt aus der Subadditivität: $\infty = \mu\left(E \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E \cap A_i)$. Mit $E = M$ ist dies die σ-Additivität von μ !

Allerdings sind wir mit dem Nachweis, daß $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ μ-meßbar ist, noch nicht ganz fertig.

An dieser Stelle erweist es sich als praktisch, statt der disjunkten Familie (A_n) die monoton steigende Familie (C_n) zu benutzen, die durch $C_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ definiert ist, wobei $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Offenbar ist $\mu(C_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$ und daher $\lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n)$, bzw.

$$\mu(E \cap C_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E \cap A_i) \text{ und } \lim_{n\to\infty} \mu(E \cap C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap A_n) = \mu(E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) \ .$$

Wir setzen jetzt $D_n := C_n^c$, $D := \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$.

Weil $\mu(E) = \mu(E \cap C_n) + \mu(E \cap D_n)$, folgt $\lim_{n\to\infty} \mu(E \cap D_n) = \mu(E) - \lim_{n\to\infty} \mu(E \cap C_n)$.
(Man beachte, daß eine Zahl kleiner als unendlich subtrahiert wird.)

Es gilt natürlich $\mu(E \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i) \leqslant \mu(E \cap D_n)$, also $\mu(E \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mu(E \cap D_n)$.

Wir benötigen noch die umgekehrte Ungleichung, denn dann folgt aus
$\lim_{n\to\infty} \mu(E \cap D_n) = \mu(E) - \lim_{n\to\infty} \mu(E \cap C_n)$, daß $\mu(E) = \mu(E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) + \mu(E \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n)$,
und dies ist die gesuchte Bedingung für die μ-Meßbarkeit von $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

Also Enspurt: Wegen der Subadditivität von μ ist $\mu(E \cap D_n) \leqslant \mu(E \cap (D_n - D)) + \mu(D)$, während

$$\mu(E \cap (D_n - D)) = \mu\left(E \cap C_n^c \cap \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} C_n^c\right)^c\right) = \mu\left(E \cap C_n^c \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)\right) = \mu\left(E \cap C_n^c \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) =$$
$$\mu\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (C_n^c \cap A_i)\right)\right) = \mu\left(E \cap \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} (E \cap A_i)\right) \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} \mu(E \cap A_i) < \epsilon$$

wobei zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ n so groß gewählt werden kann, daß die letzte Ungleichung gilt.
Die Ungleichung davor gilt wegen der Subadditivität von μ , ansonsten wurden nur einfache Mengenumformungen benutzt.
Wir haben also $\lim_{n\to\infty} \mu(E \cap D_n) \leqslant \epsilon + \mu(D)$,
und damit endlich die noch fehlende Ungleichung $\lim_{n\to\infty} \mu(E \cap D_n) \leqslant \mu(D)$!

Bemerkung 1: Keins der obigen Argumente ist besonders tiefsinnig!
Bemerkung 2: Zwar wissen wir nun, daß die μ-meßbaren Mengen eine σ-Algebra bilden, aber der Satz gibt keinerlei Anhaltspunkte dazu, welche Mengen neben M und $\emptyset$ tatsächlich μ-meßbar sind! Dazu muß man das jeweils vorliegende äußere Maß genauer untersuchen.

Zusatz:
Die σ-Algebra der μ-meßbaren Mengen ist vollständig: Ist L eine μ-meßbare Nullmenge und $N \subset E$, so folgt aus der Monotonie, daß $\mu(N) = 0$. Ist $E \subset M$ beliebig, so ist $\mu(E) \geqslant \mu(E \cap N) + \mu(E \cap N^c)$, denn der erste Summand ist aus Monotoniegründen gleich Null und ebenfalls aus Monotoniegründen gilt $\mu(E \cap N^c) \leqslant \mu(E)$. Die umgekehrte Ungleichung $\mu(E) \leqslant \mu\big((E \cap N) \cup (E \cap N^c)\big) \leqslant \mu(E \cap N) + \mu(E \cap N^c)$ gilt aufgrund der Subadditivität von μ.
Insgesamt jedenfalls: N ist μ-meßbar