2. Ist $(M,\mathfrak{A},\mu)$ ein Maßraum, und sind $A_1,\dots,A_n\in\mathfrak{A}$ paarweise disjunkt und $\alpha_1,\dots,\alpha_n\geqslant 0$, so ist $s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}$ definitionsgemäß „einfach“. Man erinnere sich an auch an die Definitionen

$$\int_A s\,\mathrm{d}\mu:=\sum_{i=1}^{n}\mu(A\cap A_i) \quad \text{und} \quad \int_A f\,\mathrm{d}\mu:=\sup_{\substack{s\leqslant f\\ s \text{ einfach}}}\int_A s\,d\mu \quad \text{für ein meßbares } f:M\to[0,\infty] \ .$$

Man zeige:

a) Ist $N=\{x\in M\,|\,f(x)\neq 0\}$ eine Nullmenge, so ist $\int_M f\,\mathrm{d}\mu=0$.

b) Setzt man für $A\in\mathfrak{A}$ $\quad\nu(A):=\int_A f\,\mathrm{d}\mu$, so ist ν ein Maß auf $\mathfrak{A}$.

(Für den Nachweis der -Additivität kann man den Satz über die monotone Konvergenz benutzen).

ad a) Wir gehen von $f\geqslant 0$ aus. Sei nun s einfach und $0\leqslant s\leqslant f$ mit $s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}$ wie oben. Wäre $\int_M s\ \mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(A_i)>0$, so wäre für ein i $\alpha_i>0$ und $\mu(A_i)>0$. Damit wäre A_i keine Nullmenge, und für alle $x\in A_i$ wäre $s(x)=\alpha_i>0$. Damit wäre für alle $x\in A_i$ auch $f(x)>0$, d.h. $A_i\subset N$. Da N eine Nullmenge ist, müßte auch A_i eine Nullmenge sein Widerspruch!

Also ist $\int_M s\,d\mu=0$ für jedes s und damit auch $\int_M f\,\mathrm{d}\mu:=\sup_{0\leqslant s\leqslant f}\int_M s\,\mathrm{d}\mu=0$.

ad b) Wir gehen wieder von $f\geqslant 0$ aus. Zu zeigen ist die σ-Additivität von ν.
Sei also $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge disjunkter Mengen in $\mathfrak{A}$ und $A:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$, so ist zu zeigen

$$\int_A f\ \mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{A_i} f\ \mathrm{d}\mu \ .$$

Nun gilt für zwei disjunkte meßbare Mengen $C,D\in\mathfrak{A}$, wie man leicht mittels Definition des Integrals positiver Funktionen mit Hilfe von Treppenfunktionen nachweist,
$\int_C f\ \mathrm{d}\mu+\int_C f\ \mathrm{d}\mu=\int_{C\cup D} f\ \mathrm{d}\mu$, was sich natürlich induktiv auf endlich viele Summanden erweitert. Setzt man also $B_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$, so hat man $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n$ und $\int_{B_n} f\ \mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i} f\ \mathrm{d}\mu$.
Man muß daher zeigen

$$\int_A f\ \mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_{B_n} f\ \mathrm{d}\mu \text{ , bzw. was dasselbe bedeutet } \int_M \chi_A f\ \mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_M \chi_{B_n} f\ \mathrm{d}\mu \ .$$

Nun sind aber offenbar die $\chi_{B_n}f$ eine Familie positiver meßbarer Funktionen, die monton von unten gegen $\chi_A f$ konvergieren.

Die letzte Gleichung ist also unmittelbare Konsequenz des Satzes über die montone Konvergenz.

3. Sei $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqslant y\leqslant 4-x^2 \text{ und } -2\leqslant x\leqslant 2\}$ und λ_2 das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^2$.
Man berechne $\int_A ((x+y)\,y)\,\mathrm{d}\lambda_2$ und begründe die Rechenschritte.

Wir haben die stetige und damit Borel-meßbare Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ und müssen die positive Borel-meßbare Funktion $\chi_A f$ auf $\mathbb{R}^2$ integrieren.

Nach dem Satz von Fubini ist

$$\int_{\mathbb{R}^2}\chi_A f\ \mathrm{d}\lambda=\int\limits_{x\in\mathbb{R}}\left(\int\limits_{y\in\mathbb{R}}\chi_A(x,y)\,f(x,y)\ \mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}\lambda$$

Man beachte, daß das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^2$ und auf $\mathbb{R}^1$ hier gleich benannt wird.
(Falls es Mißverständnisse gibt, benutze man λ_2 und λ_1 .

Man muß jetzt weiter begründen, daß das Integral auf der rechten Seite gleich
$$\int\limits_{x\in[-2,2]}\left(\int\limits_{y\in\mathbb{R}}\chi_A(x,y)\,f(x,y)\ \mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}\lambda$$ und im nächsten Schritt gleich
$$\int\limits_{x\in[-2,2]}\left(\int\limits_{y\in[0,4-x^2]}\chi_A(x,y)\,f(x,y)\ \mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}\lambda=\int\limits_{x\in[-2,2]}\left(\int\limits_{y\in[0,4-x^2]}f(x,y)\ \mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}\lambda$$ ist.

Man rechnet jetzt den Ausdruck im inneren Integral aus; da es sich um eine stetige Funktion handelt, ist das Lebesgue-Integral gleich dem Riemann-Integral.

Jetzt rechnet man das innere Integral als Funktion von x aus, die sich als stetig erweist, so daß auch das äußere Integral als Riemann – Integral ausrechenbar ist.