Analysis III WS07, Aufgabenblatt 12 **M. Hortmann**							
Name(n)							***Gruppennummer***
Punkte							
1a	b	c	2a	b	3	Summe	% bearbeitet

1. Sei $(M, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Man zeige:

a) $\overline{\mathfrak{A}} := \left\{ B \subset M \;\middle|\; \exists\ A, C \in \mathfrak{A}:\ A \subset B \subset C \text{ und } \mu(A) = \mu(C) \right\}$ ist eine σ-Algebra.

b) Ist $B \in \overline{\mathfrak{A}}$, so gibt es definitionsgemäß $A, C \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) = \mu(C)$. Man setze $\overline{\mu}(B) := \mu(A)$ und zeige, daß dadurch ein Maß auf $\overline{\mathfrak{A}}$ definiert wird. (Dazu ist offenbar zunächst die Wohldefiniertheit von $\overline{\mu}$ zu zeigen.)

c) Man zeige: Ist $B \in \overline{\mathfrak{A}}$ und overline $\overline{\mu}(B) = 0$ und $D \subset B$, so ist $D \in \overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mu}(D) = 0$.

2. Ist $(M, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, und sind $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ paarweise disjunkt und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$, so ist $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ definitionsgemäß „einfach“. Man erinnere sich an auch an die Definitionen

$$\int_A s \,\mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{n} \mu(A \cap A_i) \quad \text{und} \quad \int_A f \,\mathrm{d}\mu := \sup_{\substack{s \leqslant f \\ s \text{ einfach}}} \int_A s \, d\mu \quad \text{für ein meßbares } f: M \to [0, \infty] .$$

Man

a) Ist $N = \{ x \in M \mid f(x) \neq 0 \}$ eine Nullmenge, so ist $\int_M f \,\mathrm{d}\mu = 0$.

b) Setzt man für $A \in \mathfrak{A}$ $\nu(A) := \int_A f \,\mathrm{d}\mu$, so ist ν ein Maß auf $\mathfrak{A}$.

(Für den Nachweis der -Additivität kann man den Satz über die monotone Konvergenz benutzen).

3. Sei $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leqslant y \leqslant 4 - x^2 \text{ und } -2 \leqslant x \leqslant 2 \right\}$ und λ_2 das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^2$.
Man berechne $\int_A ((x+y)\,y) \,\mathrm{d}\lambda_2$ und begründe die Rechenschritte.