Lösung Blatt 11 Aufgabe 2

Man beweise oder widerlege, daß es eine abzählbar unendliche σ-Algebra gibt.

Folgende Aussage ist richtig: Es gibt keine abzählbar unendliche σ-Algebra.

Beweis durch Widerspruch: Sei $\mathfrak{A}$ eine abzählbar unendliche σ-Algebra auf einer unendlichen Menge M. Ob M abzählbar oder überabzählbar ist, wird keine Rolle spielen.

Man beschafft sich eine unendliche Teilmenge $\mathcal{M}\subset\mathfrak{A}$ paarweise disjunkter Elemente von $\mathfrak{A}$, und baut eine Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, in der jedes der Elemente von $\mathcal{M}$ höchstens einmal vorkommt. Ist jetzt $I\subset\mathbb{N}$, so sei $M_I:=\bigcup_{n\in I} M_n$. Für jedes $I\subset\mathbb{N}$ ist $M_I\in\mathfrak{A}$. Offenbar gilt: Sind $I, J\subset\mathbb{N}$ und $I\neq J$, so ist $M_I\neq M_J$. Es gibt aber überabzählbar viele Teilmengen von $\mathbb{N}$ und damit überabzählbar viele Mengen M_I und damit überabzählbar viele Elemente von $\mathfrak{A}$. Daher kann $\mathfrak{A}$ nicht abzählbar unendlich sein.

Wie aber beschafft man sich die unendliche Teilmenge $\mathcal{M}\subset\mathfrak{A}$ paarweise disjunkter Elemente?

Zu $x\in M$ bilde man die Menge $M_x:=\bigcap_{\substack{A\in\mathfrak{A}\\ x\in A}} A$, also den Durchschnitt aller Elemente der σ-Algebra, welche das Element x enthalten. Da in diesem Durchschnitt jedenfalls die Menge M selbst auftritt, ist $M_x\neq\emptyset$, und außerdem gilt natürlich $x\in M_x$. Weil es sich um einen abzählbaren Durchschnitt handelt, ist $M_x\in\mathfrak{A}$. Darüber hinaus zeigt man leicht, daß für $x, y\in M$ gilt: $M_x\cap M_y=\emptyset$ oder $M_x=M_y$.

Die Frage ist nun, ob es unendlich viele verschiedene M_x gibt. Die Antwort darauf ist positiv, denn für jedes $A\in\mathfrak{A}$ gilt offenbar: $A=\bigcup_{x\in A} M_x$. Gäbe es nur endlich viele M_x, so könnte man sie nicht zu unendlich vielen $A\in\mathfrak{A}$ vereinigen.

Die Menge $\mathcal{M}:=\{M_x \mid x\in M\}$ ist also eine unendliche Menge disjunkter Elemente von $\mathfrak{A}$.