Analysis III WS07, Aufgabenblatt 11 **M. Hortmann**							
Name(n)							***Gruppennummer***
Punkte							
1a	b	2	3	4a	b	Summe	% bearbeitet

Vorbemerkungen:
Eine Menge M heißt *abzählbar*, wenn es eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to M$ gibt.
Es darf im Folgenden benutzt werden, daß $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ abzählbar sind, und daß eine Menge M abzählbar ist, wenn es eine surjektive Abbildung $N \to M$ gibt, wobei N abzählbar ist.

Nach obiger Definition sind auch endliche Mengen abzählbar. Will man über abzählbare Mengen reden, die nicht endlich sind, benutzt man den Begriff *abzählbar unendlich*.

Man sagt, ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis erfülle *das zweite Abzählbarkeitsaxiom*.

Man zeige:

1. a) Die Menge der offenen Intervalle $U_\epsilon(x)$ mit $x, \epsilon \in \mathbb{Q}$ ist eine abzählbare Basis der (gewöhnlichen) Topologie auf $\mathbb{R}$.

b) Besitzen die topologischen Räume M,N eine abzählbare Basis, so auch $M \times N$, versehen mit der Produkttopologie.

2. Man beweise oder widerlege, daß es eine abzählbar unendliche σ-Algebra gibt.

3. Sei $(M, \mathfrak{A})$ ein Meßraum und $f_n : M \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Folge meßbarer Funktionen. Man zeige, daß die Menge $A := \left\{ x \in M \,\middle|\, (f_n(x)) \text{ konvergiert} \right\}$ meßbar, d.h. Element von $\mathfrak{A}$ ist.

4. Sei $(M, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f_n : M \to [0, \infty]$ eine Folge meßbarer Funktionen mit den Eigenschaften: $\forall\, n \in \mathbb{N}\; f_n \geq f_{n+1}$, $\forall\, x \in M\; f_n(x) \to f(x)$ und $\int_M f_1 \,\mathrm{d}\mu < \infty$.

a) Man zeige: $\int_M f_n \,\mathrm{d}\mu \to \int_M f \,\mathrm{d}\mu$
b) Man gebe ein Gegenbeispiel zur Aussage in a) wenn man die Voraussetzung $\int_M f_1 \,\mathrm{d}\mu < \infty$ fallen läßt.