1. Lie-Produkt von Vektorfeldern

Sei $a=(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$. Man betrachte im $\mathbb{R}^2$ die Vektorfelder X, Y, die gegeben sind durch
$X(x_1,x_2)=(a_1,a_2)$ und $Y(x_1,x_2)=(-x_2,x_1)$, bzw. in anderer Schreibweise:
$X=a_1\frac{\partial}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial}{\partial x_2}$ bzw. $X=a_1e_1+a_2e_2$, $Y=-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$ bzw. $Y=-x_2e_1+x_1e_2$.
Für beide Vektorfelder sollten Sie die Stromlinien $\alpha_x(t),\beta_x(t)$ mit $\alpha_x(0)=x$ und $\beta_x(0)=x$ für alle $x\in\mathbb{R}^2, t\in\mathbb{R}$ berechnen können und daher auch die Diffeomorphismen $\Phi_t:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $x\to\alpha_x(t)$ und $\Psi_s:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $x\to\beta_x(s)$.

Die Stromlinien $\alpha_x(t)$ ergeben sich als Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems
$y_1'=a_1$
$y_2'=a_2$
mit der Anfangsbedingung $y(t)=x$. Dies ist ein inhomogenes lineares Gleichungssytem mit konstanten Koeffizienten
$y'=Ax+a$, wobei $A=0$

Löst man dies mit dem Ansatz „Variation der Konstanten", so ergibt sich
$\alpha_x(t)=x+ta$, also $\Phi_t(x)=x+ta$.

Man macht natürlich leicht die Probe, daß die Lösung so aussieht und hätte diese Lösung auch mit bloßem Auge sehen können.

Ebenso ergeben sich die Stromlinien $\beta_x(t)$ als Lösungen des homogenen Systems
$y'=Ax$ mit $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, und man erhält mit den erlernten Methoden die Fundamentallösung
$\Psi(t)=\exp(tA)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$. Damit ist $\beta_x(t)=\Psi(t)x=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\Psi_t(x)$ die Lösung mit der Anfangsbedingung $\beta_x(t)=x$.

Diese Lösung konnte man bei der geometrischen Gestalt des im Kreis laufenden Vektorfelds Y auch mit „bloßem Auge" erkennen (wie gestern an der Tafel).

a) Berechnen Sie das Vektorfeld bzw. den Differentialoperator
$[X,Y](f):=X(Y(f))-Y(X(f))$

Es ergibt sich $[X,Y]=\sum_i\left(X(Y^i)-Y(X^i)\right)\frac{\partial}{\partial x_i}=-a_2\frac{\partial}{\partial x_1}+a_1\frac{\partial}{\partial x_2}$.

b) Berechnen Sie $X_t(x):=(\Phi_{-t})_*(Y(\Phi_t(x)))$ und $Z(x)=\lim_{t\to0}\frac{X_t(x)-X(x)}{t}$ und
$Y_t(x):=(\Psi_{-t})_*(X(\Psi_t(x)))$ und $W(x)=\lim_{t\to0}\frac{Y_t(x)-Y(x)}{t}$.
(Beachten Sie, daß sämtlich $X_t(x),Y_t(x),Z(x),W(x)\in T_x$.)

Ist Φ ein beliebiger Diffeomorphismus des $\mathbb{R}^n$ mit $\Phi(p)=q$ und $X_p \in T_p$, so gilt definitionsgemäß für einen Funktionskeim $f_q \in \mathcal{D}_q$ $(\Phi_* X_p)(f_q) = X_p(f_q \circ \Phi)$, d.h. $(\Phi_* X_p)$ ist eine Derivation in q, d.h. $(\Phi_* X_p) \in T_q$ (das hatten wir alles). Daraus ergibt sich mit der Kettenregel die Formel (auch die hatten wir): $\Phi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\right) = \sum_j \frac{\partial \Phi^j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial x_j}(q)$ und damit für einen Vektor $X(p) = \sum_i X^i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \in T_p$: $\Phi_*(X(p)) = \sum_j \sum_i \frac{\partial \Phi^j}{\partial x_i}(p) X^i(p) \frac{\partial}{\partial x_j}(q)$.

Identifizieren wir jetzt der Übersichtlichkeit halber die $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ und $\frac{\partial}{\partial x_j}(q)$ mit den kanonischen Einheitsvektoren, so ergibt sich $\Phi_*(X(p)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial \Phi^1}{\partial x_1}(p) \\ \frac{\partial \Phi^1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial \Phi^1}{\partial x_1}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^1(p) \\ X^2(p) \end{pmatrix}$.

In unserer Aufgabe ist $Y(\Phi_t(x)) = Y(x+ta) = \begin{pmatrix} -x_2 - ta_2 \\ x_1 + ta_1 \end{pmatrix}$ und $(\Phi_{-t})_*\left(Y\left(\Phi_t(x)\right)\right) = \begin{pmatrix} -x_2 - ta_2 \\ x_1 + ta_1 \end{pmatrix}$, denn die obige Jacobi-Matrix ist in diesem Fall die Identität, da ja Φ_{-t} eine konstante Translation ist.

Also haben wir $(\Phi_{-t})_*\left(Y\left(\Phi_t(x)\right)\right) - Y(x) = \begin{pmatrix} -ta_2 \\ ta_1 \end{pmatrix}$.

Dividiert man durch *t*, so ergibt sich für jedes x : $\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = -a_2 \frac{\partial}{\partial x_1}(x) + a_1 \frac{\partial}{\partial x_2}(x)$.

Damit erübrigt sich die Grenzwertberechnung $t \to 0$, *t* kommt ja nicht mehr vor.

Genau dieses Ergebnis sollte erzielt werden!

Die Berechnung von $Y_t(x) := (\Psi_{-t})_*(X(\Psi_t(x)))$ und $W(x) = \lim_{t\to 0} \frac{Y_t(x) - Y(x)}{t}$ erfolgt analog.
Man beachte noch den Tippfehler in der ursprünglichen Definition von W.