Analysis III **WS07,** **Aufgabenblatt 10** **M. Hortmann**							
Name(n)							***Gruppennummer***
Punkte							
1a	b	c	2a	b	3	Summe	% bearbeitet

1. Lie-Produkt von Vektorfeldern

Sei $a=(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$. Man betrachte im $\mathbb{R}^2$ die Vektorfelder X, Y, die gegeben sind durch $X(x_1,x_2)=(a_1,a_2)$ und $Y(x_1,x_2)=(-x_2,x_1)$, bzw. in anderer Schreibweise:
$X=a_1\frac{\partial}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial}{\partial x_2}$ bzw. $X=a_1e_1+a_2e_2$, $Y=-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$ bzw. $Y=-x_2e_1+x_1e_2$.

Für beide Vektorfelder sollten Sie die Stromlinien $\alpha_x(t),\beta_x(t)$ mit $\alpha_x(0)=x$ und $\beta_x(0)=x$ für alle $x\in\mathbb{R}^2, t\in\mathbb{R}$ berechnen können und daher auch die Diffeomorphismen $\Phi_t:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $x\to\alpha_x(t)$ und $\Psi_s:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $x\to\beta_x(s)$.

a) Berechnen Sie das Vektorfeld bzw. den Differentialoperator
$[X,Y](f):=X(Y(f))-Y(X(f))$

b) Berechnen Sie $X_t(x):=(\Phi_{-t})_*(Y(\Phi_t(x)))$ und $Z(x)=\lim_{t\to 0}\frac{X_t(x)-X(x)}{t}$ und
$Y_t(x):=(\Psi_{-t})_*(X(\Psi_t(x)))$ und $W(x)=\lim_{t\to 0}\frac{X_t(x)-X(x)}{t}$.
(Beachten Sie, daß sämtlich $X_t(x),Y_t(x),Z(x),W(x)\in T_x$.)

c) Starten Sie im Punkt $x\in\mathbb{R}^2$ und wandern Sie die Parameterdistanz *t* auf einer Stromlinie des Vektorfelds *X* zum Punkt $x_1(t)=\Phi_t(x)$, wandern Sie von da aus weiter die Parameterdistanz *t* auf einer Stromline des Vektorfelds *Y* zum Punkt $x_2(t)=\Psi_t(x_1(t))$, von dort aus weiter dieselbe Parameterdistanz auf einer Stromlinie des Vektorfelds $-X$ zum Punkt $x_3(t)$ und von dort wieder dieselbe Parameterdistanz auf einer Stromlinie des Vektorfelds -*Y* zum Punkt $x_4(t)$.
Wäre $[X,Y]=0,$ so wären Sie im Ausgangspunkt gelandet, d.h. es hätte $x_4(t)=x$ gegolten.
Bei der obigen Wahl von X,Y gilt dies nicht:

Berechnen Sie $V(x)=\lim_{t\to 0}\frac{x_4(t)-x}{t^2}$!

2. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen der Menge M.
Man setzt $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n$ und nennt dies den Limes-Superior der Mengenfolge, analog nennt man $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_n$ den Limes-Inferior.

a) Man zeige: $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n^c = \left(\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n\right)^c$,
b) $\overline{\lim_{n\to\infty}} (A_n \cap B_n) \subset \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \cap \overline{\lim_{n\to\infty}} B_n$ und gebe ein Beispiel, für das die umgekehrte Inklusion nicht gilt.

3. Sei M eine Menge.
Eine Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(M)$ heißt monotone Klasse, wenn für jede monoton steigende Folge (A_n) von Mengen in $\mathcal{M}$ gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$, und für jede monoton fallende Familie (B_n) von Mengen in $\mathcal{M}$ gilt $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{M}$.
Eine Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(M)$ heißt Mengenalgebra, wenn
$M \in \mathcal{M}$, $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$, $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{M}$.

Man zeige: Ist $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(M)$ gleichzeitig monotone Klasse und Mengenalgebra, so ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra.

Bemerkung: Trivialerweise ist eine σ-Algebra sowohl eine Mengenalgebra wie eine monotone Klasse.