Analysis III WS07, Aufgabenblatt 8 **M. Hortmann**	
Name(n)	***Gruppennummer***

Punkte						
1a	b	2	3	4	Summe	% bearbeitet

Aufgabe 1

a) Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -5 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Man bestimme eine Fundamentalmatrix für das homogene lineare Differentialgleichungssystem $y' = Ay$.

b) Man betrachte das inhomogene System $y' = Ay + b(x)$ mit $b(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und finde die Lösung $\varphi(x)$, die der Anfangsbedingung $\varphi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ genügt.

Aufgabe 2

Man betrachte die Differentialgleichung $y'' + 2y' + 3y + x = 0$ und berechne die Lösung $f(x)$, die den Anfangsbedingungen $f(1) = 1, f'(1) = 2$ genügt.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Differentialgleichung $y'' = xy' + y$. Gesucht ist eine Lösung $f(x)$ mit den Anfangsbedingungen $f(0) = 1, f'(0) = 0$. (Machen Sie den Ansatz $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und berechnen Sie die Koeffizienten a_n .)

Aufgabe 4

Seien $X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \sum_{i=1}^{n} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ zwei glatte Vektorfelder, definiert auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$. Bekanntlich lassen sich X, Y als Differentialoperatoren interpretieren, d.h. X, als Operator aufgefaßt, ordnet einer Funktion $f \in \mathcal{D}(U)$ die Funktion $Xf = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \in \mathcal{D}(U)$ zu. Die lineare Abbildung $X : \mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}(U)$ ist eine Derivation, denn offenbar gilt die Produktregel $X(fg) = fXg + gXf$.

Man bilde jetzt den Differentialoperator $Z := XY - YX$; dabei sei z.B. $(XY)(f) := X(Yf)$.

Man nennt Z auch das Lie-Produkt von X, Y und benutzt die Notation $Z = [X, Y]$

Man zeige: Z ist eine Derivation $\mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}(U)$.

Man schreibe Z in der Form $Z = \sum_{i=1}^{n} Z^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, d.h. man berechne die Koeffizientenfunktionen $Z^i \in \mathcal{D}(U)$.