

**Analysis III WS07, Aufgabenblatt 7**  
**M. Hortmann**

<i>Name(n)</i>								<i>Gruppennummer</i>
<i>Punkte</i>								
1a	b	c	d	e	2a	b	Summe	% bearbeitet

**Aufgabe 1**

Im  $\mathbb{R}^2$  sei ein Vektorfeld durch eine lineare Abbildung  $x \rightarrow Ax$  gegeben.

Dabei betrachte man die Matrizen

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  . b)  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  , c)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  , d)  $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

und fertige jeweils eine Skizze jedes Vektorfelds und seiner Stromlinien.

Im Falle a) gebe man Formeln für die Menge der Stromlinien des Vektorfelds an, so daß jeder Punkt von  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  auf genau einer Stromlinie liegt. Dabei sind sämtliche Stromlinien als Abbildungen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  anzugeben.

e) Offenbar hat für  $x_1 \neq 0$  jeder Vektor des Vektorfelds aus a) die Steigung  $f(x_1, x_2) = -x_2/x_1$ . Anhand der oben gemachten Skizze sollen Sie erraten, welche Funktionen  $g: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$  die Bedingung  $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}: g'(x) = f(x, g(x))$  erfüllen, d.h welche Funktionen die Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$  lösen. (Probe!) Finden Sie für jeden Punkt  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  die eindeutig bestimmte Lösung mit  $g(a) = b$ .

**Aufgabe 2**

Betrachten wir die Abbildung durch  $z \rightarrow z^2$  gegebene Abbildung  $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Wenn wir diese als Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  auffassen, erhalten wir Komponentenfunktionen  $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ .

a) Man berechne die „Gradientenvektorfelder“  $X_1(x, y) = \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, y) \right)$  und

$X_2(x, y) = \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x, y) \right)$ , zeige, daß sie in jedem Punkt des  $\mathbb{R}^2$  aufeinander

senkrecht stehen und fertige eine Skizze für die Vektorfelder und ihre Stromlinien an.

b) Man errate Formeln für die Stromlinien und verifiziere diese.