

Analysis III WS07, Aufgabenblatt 7
M. Hortmann

<i>Name(n)</i>								<i>Gruppennummer</i>
<i>Punkte</i>								
1a	b	c	d	e	2a	b	Summe	% bearbeitet

Aufgabe 1

Im \mathbb{R}^2 sei ein Vektorfeld durch eine lineare Abbildung $x \rightarrow Ax$ gegeben.

Dabei betrachte man die Matrizen

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

und fertige jeweils eine Skizze jedes Vektorfelds und seiner Stromlinien.

Im Falle a) gebe man Formeln für die Menge der Stromlinien des Vektorfelds an, so daß jeder Punkt von $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ auf genau einer Stromlinie liegt. Dabei sind sämtliche Stromlinien als Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ anzugeben.

e) Offenbar hat für $x_1 \neq 0$ jeder Vektor des Vektorfelds aus a) die Steigung $f(x_1, x_2) = -x_2/x_1$. Anhand der oben gemachten Skizze sollen Sie erraten, welche Funktionen $g: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ die Bedingung $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}: g'(x) = f(x, g(x))$ erfüllen, d.h welche Funktionen die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ lösen. (Probe!) Finden Sie für jeden Punkt $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $a \neq 0$ die eindeutig bestimmte Lösung mit $g(a) = b$.

Aufgabe 2

Betrachten wir die Abbildung durch $z \rightarrow z^2$ gegebene Abbildung $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Wenn wir diese als Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ auffassen, erhalten wir Komponentenfunktionen $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$.

a) Man berechne die „Gradientenvektorfelder“ $X_1(x, y) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, y) \right)$ und

$X_2(x, y) = \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x, y) \right)$, zeige, daß sie in jedem Punkt des \mathbb{R}^2 aufeinander

senkrecht stehen und fertige eine Skizze für die Vektorfelder und ihre Stromlinien an.

b) Man errate Formeln für die Stromlinien und verifiziere diese.