Lösungen zu Blatt 6

1. a) Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ offen, $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Karte. Man zeige, daß auf U gilt $\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} = \delta^i_j$.

b) Ist $p \in U$ und $\zeta_p \in T_p$ eine Derivation, so setze man $\zeta^i_p := \zeta_p(\varphi^i)$ und zeige $\zeta_p = \sum_{i=1}^{n} \zeta^i_p \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$; außerdem zeige man die lineare Unabhängigkeit der Derivationen $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$. (Hinweis: es soll also bewiesen werden, daß die $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ eine Basis von T_p bilden; zum Beweis benutze man ganz einfach a))

Es war ja nur noch zu zeigen: Wenn zwei Derivationen auf den Funktionskeimen der $\varphi_i = x_i$ übereinstimmen, dann stimmen sie für alle Funktionskeime überein.

Arbeiten wir also auf der Mannigfaltigkeit im Punkt p_0 und nehmen oBdA an, daß $\varphi(p_0) = 0$. Gestern geriet die Sache ins Stocken, weil ich dachte, daß die Nichtlinearität von φ eine Summen und Produktzerlegung einer Funktion auf der Mannigfaltigkeit beim Abbilden in den $\mathbb{R}^n$ zerstört: das ist aber natürlich nicht so: Sind M, N Mengen, eine Abbildung $\varphi : M \to N$ und die Algebren der reellwertigen Funktionen auf M, N, geschrieben $\mathscr{F}(N), \mathscr{F}(M)$, so ist die Verknüpfung mit φ ein Algebrahomomorphismus, häufig bezeichnet als „Pullback" (von Funktionen), also $\varphi^* : \mathscr{F}(N) \to \mathscr{F}(M)$, gegeben durch $f \to f \circ \varphi$, also $\varphi^*(f) := f \circ \varphi$. Dies ist ist ganz trivial nachzuprüfen. Ist φ bijektiv, so auch φ^* , und es gilt sogar $\left(\varphi^{-1}\right)^* = \left(\varphi^*\right)^{-1}$, ebenfalls trivialerweise. Diese Aussagen lassen sich natürlich für Räume stetiger und differenzierbarer Funktionen wiederholen, wenn nur φ stetig, differenzierbar ist.

Ausgehend von der Kartenabbildung $\varphi : U \to V$ haben wir also einen Algebraisomorphismus $\mathcal{D}(V) \to \mathcal{D}(U)$, gegeben durch $g \to g \circ \varphi$ und sein Inverses $\mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}(V)$, gegeben durch $f \to f \circ \varphi^{-1}$. Dieselbe Situation hat man natürlich auch für die Keime $\mathcal{D}_{p_0} \to \mathcal{D}_0$: auch diese Algebren sind in natürlicher Weise isomorph.

Habe ich also einen Funktionskeim f_{p_0} so transportiere ich ihn in einen Funktionskeim $g_0 = f_{p_0} \circ \varphi^{-1}$. Jetzt bin ich im $\mathbb{R}^n$ und konstruiere, wie gestern an der Tafel, dort die Zerlegung $g(x) = g(0) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x) x_i$. Diese Zerlegung transportiere ich zurück in eine Umgebung von p und habe dort $f(p) = f(p_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i(p) \varphi_i(p) = f(p_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i(p) x_i(p)$ mit $h_i = g_i \circ \varphi$, d.h. $f = f(p_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i x_i$ in einer Umgebung von p_0 , und damit auch auf Keimebene.

Wenn ich jetzt die Ausgangsderivation ζ_{p_0} auf beide Seiten anwende, fällt die Konstant $f(p_0)$ weg. Weil $\varphi(p_0) = x(p_0) = 0$, sind die $x_i(p_0) = 0$, daher erhalte ich (Produktregel) $\zeta_{p_0}(f_p) = \sum_{i=1}^{n} h_{i\,p}(\zeta_{p_0} x_{i\,p_0})$, d.h. die Derivation ist durch ihre Werte auf den $x_{i\,p_0}$ bereits eindeutig bestimmt. (Die obige Zerlegung $g(x) = g(0) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x) x_i$ ist das A und O; ist ja bei durch Potenzreihen dargestellten Funktionen trivial.)