Lösungen zu Blatt 6

1. a) Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ offen,
$\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Karte. Man zeige, daß auf U gilt $\dfrac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} = \delta^i_j$ [1] .

b) Ist $p \in U$ und $\zeta_p \in T_p$ eine Derivation, so setze man $\zeta^i_p := \zeta_p(\varphi^i)$ und zeige
$\zeta_p = \sum_{i=1}^{n} \zeta^i_p \dfrac{\partial}{\partial x^i}(p)$; außerdem zeige man die lineare Unabhängigkeit der Derivationen
$\dfrac{\partial}{\partial x^i}(p)$. (Hinweis: es soll also bewiesen werden, daß die $\dfrac{\partial}{\partial x^i}(p)$ eine Basis von T_p bilden; zum Beweis benutze man ganz einfach a))

3. b) Im $\mathbb{R}^2$ betrachten wir die offene Menge $U := \{(x, y) \mid y \neq \text{ oder } x < 0\}$ und die Karte
$\varphi : U \to]0, \infty[\times]0, 2\pi[$ mit $\varphi(x, y) := (r, \theta)$ und $\varphi^{-1}(r, \theta) = (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Man drücke auf U $\dfrac{\partial}{\partial r}$ und $\dfrac{\partial}{\partial \theta}$ als Linearkombination von $\dfrac{\partial}{\partial x}$ und $\dfrac{\partial}{\partial y}$ aus, ebenso $\mathrm{d}r$ und $\mathrm{d}\theta$ als Linearkombination von dx und dy , und schließlich auch $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ als Vielfaches von $\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta$.

Auf der 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^2$ sind zwei Karten im Spiel, nämlich (U, φ) und $(U', \varphi') = (\mathbb{R}^2, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$. Man erinnere sich an die Transformationsformel für Vektorfelder:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_j}$$

. Dies bedeutet in unserem Fall

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{sowie}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} = -r\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial}{\partial y}$$

Dies entspricht den Gleichungen

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial x}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta = \cos\theta\,\mathrm{d}r - r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \quad \text{und}$$

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial y}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta = \sin\theta\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

Wenn man eine Variable für Punkte der Mannigfaltigkeit braucht, in diesem Fall $\mathbb{R}^2$, nimmt man gern p , während x,y als Funktionen auf $U' = \mathbb{R}^2$ und r, θ als Funktionen auf U aufgefaßt werden. $\dfrac{\partial}{\partial r}, \dfrac{\partial}{\partial \theta}$ sind Vektorfelder auf U , $\mathrm{d}r, \mathrm{d}\theta$ sind Kovektorfelder auf U ; es ist
$\mathrm{d}r(p) \in T^*_p$, $\dfrac{\partial}{\partial r}(p) \in T_p$. Letztere Derivation wird definitionsgemäß ausgerechnet, indem für

1 d.h. die Derivation $\dfrac{\partial}{\partial x_j}(p)$ ist in jedem Punkt $p \in U$ auf den durch φ_i gegebenen Funktionskeim anzuwenden.

einen Funktionskeim $f_p \in \mathcal{D}_p$ $\quad \frac{\partial}{\partial r}(p)(f_p) := \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r}(r, \theta)$ gebildet wird, wobei es sich bei dem Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung um eine partielle Ableitung im Bild der Karte $\varphi : U \to V$, also in V handelt.

Macht man jetzt den Ansatz $\frac{\partial}{\partial x} = \lambda \frac{\partial}{\partial r} + \mu \frac{\partial}{\partial \theta}$, $\frac{\partial}{\partial y} = \kappa \frac{\partial}{\partial r} + \sigma \frac{\partial}{\partial \theta}$, so handelt es sich um eine Gleichung auf $U \cap U'$, was hier gleich $U \cap \mathbb{R}^2 = U$ ist. Dabei sind $\lambda, \mu, \kappa, \sigma \in \mathcal{D}(U)$. Jetzt beginnt das Gleichungslösen:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos\theta \left(\lambda \frac{\partial}{\partial r} + \mu \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \sin\theta \left(\kappa \frac{\partial}{\partial r} + \sigma \frac{\partial}{\partial \theta} \right) ,$$
$$\frac{\partial}{\partial \theta} = -r \sin\theta \left(\lambda \frac{\partial}{\partial r} + \mu \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + r \cos\theta \left(\kappa \frac{\partial}{\partial r} + \sigma \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich:
$\lambda \cos\theta + \kappa \sin\theta = 1,\ \mu \cos\theta + \sigma = 0$, $-r \lambda \sin\theta + r \kappa \cos\theta = 0, -r \mu \sin\theta + r \sigma \cos\theta = 1$, m.a.W.
$\begin{pmatrix} \lambda & \kappa \\ \mu & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dies ergibt eindeutig
$\lambda = \cos\theta,\ \kappa = \sin\theta,\ \mu = \frac{-1}{r} \sin\theta,\ \sigma = \frac{1}{r} \cos\theta$, also
$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$, $\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$.

Man beachte, daß wir nach wie vor die Funktionen r, θ nicht ableiten mußten für dieses Ergebnis.

Wir können nun $\mathrm{d}r$ und $\mathrm{d}\theta$ durch Differenzieren Funktionen r , θ berechnen, wobei
$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{y}\right)$ (letztere Varianten, damit man nie durch Null dividieren muß.)

Damit erhält man z.B. $\mathrm{d}r = \frac{\partial r}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial r}{\partial y} \mathrm{d}y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathrm{d}x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathrm{d}y = \frac{\cos\theta}{r} \mathrm{d}x + \frac{\sin\theta}{r} \mathrm{d}\theta$,
und auch arctan und arccot sind gar nicht so schwer abzuleiten, und es kommen keine unschönen Ausdrücke heraus.

Man hätte aber auch hier mit dem Ansatz $\mathrm{d}r = \lambda \mathrm{d}x + \mu \mathrm{d}y$, $\mathrm{d}\theta = \kappa \mathrm{d}x + \sigma \mathrm{d}y$ durch Koeffizientenvergleich aus den bereits bekannten Darstellungen für $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ die Koeffizienten ausrechnen können, wie vorher.

Schließlich noch ist z.B. $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ so zu verstehen, daß in jedem Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ das Produkt $\mathrm{d}x(p) \wedge \mathrm{d}y(p) \in \Lambda^2 T_p^*$ berechnet wird. Es ergibt sich
$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = (\cos\theta\, \mathrm{d}r - r \sin\theta\, \mathrm{d}\theta) \wedge (\sin\theta\, \mathrm{d}r + r\cos\theta\, \mathrm{d}\theta) = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\, \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta = r\, \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta$.

Man beachte, daß es sich um Gleichungen auf der Mannigfaltigkeit handelt.
In einem Punkt p wird z.B. ausgewertet, welches dort der Wert $(r\sin\theta)(p) = r(p)\sin(\theta(p))$ ist.

Dieser Wert ist natürlich gleich $y(p)$.

(Obwohl es korrekt wäre, haben wir nie $p=(x, y)$ hingeschrieben.)

Questions welcome!