| **Analysis III WS07, Aufgabenblatt 6**<br>**M. Hortmann** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Name(n)*** | | | | | ***Gruppennummer*** | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| ***Punkte*** | | | | | | |
| 1a | b | 2 | 3a | b | Summe | % bearbeitet |
| | | | | | | |

1. a) Sei $M$ eine $n$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, $U\subset M$ offen, $\varphi: U\to V\subset\mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Karte. Man zeige, daß auf $U$ gilt $\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}=\delta^i_j$ [1] .

b) Ist $p\in U$ und $\zeta_p\in T_p$ eine Derivation, so setze man $\zeta^i_p:=\zeta_p(\varphi^i)$ und zeige $\zeta_p=\sum_{i=1}^n \zeta^i_p\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ ; außerdem zeige man die lineare Unabhängigkeit der Derivationen $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ . (Hinweis: es soll also bewiesen werden, daß die $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ eine Basis von $T_p$ bilden; zum Beweis benutze man ganz einfach a) )

2. Sei $\psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ gegeben durch $\psi(u,v)=(u,v,u^2+v^2)=(x,y,z)$ , also eine Parametrisierung eines Paraboloiden. Man hat dann die zugeordnete Abbildung der Tangentialräume $\psi_*: T_{(u,v)}\mathbb{R}^2\to T_{(x,y,z)}\mathbb{R}^3$ , auf der Derivationsebene definiert durh $\left(\psi_*(\zeta_{(u,v)})\right)(f)=\zeta_{(u,v)}(f\circ\psi)$ . Man berechne $\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)$ $\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)$ und somit eine Basis des Tangentialraums $T_{(x,y,z)}P$ für den Paraboloiden $P=\operatorname{Im}\psi$ .

3. Ist $V$ ein zweidimensionaler $\mathbb{R}$ - Vektorraum, so setzt man $\Lambda^2 V:=\left\{\varphi: V^*\times V^*\to\mathbb{R}\mid\varphi \text{ bilinear, antisymmetrisch}\right\}$ .

a) Man zeige $\Lambda^2 V$ ist eindimensional und die Abbildung $\Phi: V\times V\to\Lambda^2 V$ , die gegeben ist durch $\left(\Phi(v,w)\right)(\lambda,\mu):=\lambda(v)\mu(w)-\lambda(w)\mu(v)$ , ist bilinear und antisymmetrisch.
Man schreibt $v\wedge w:=\Phi(v,w)$ und kann jetzt mit diesem Produkt rechnen, ohne an die obige Definition denken zu müssen.

b) Im $\mathbb{R}^2$ betrachten wir die offene Menge $U:=\{(x,y)\mid y\neq \text{ oder } x<0\}$ und die Karte $\varphi: U\to]0,\infty[\times]0,2\pi[$ mit $\varphi(x,y):=(r,\theta)$ und $\varphi^{-1}(r,\theta)=(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ .
Man drücke auf $U$ $\frac{\partial}{\partial r}$ und $\frac{\partial}{\partial\theta}$ als Linearkombination von $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$ aus, ebenso $\mathrm{d}r$ und $\mathrm{d}\theta$ als Linearkombination von d$x$ und d$y$ , und schließlich auch $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ als Vielfaches von $\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta$ .

---

1 d.h. die Derivation $\frac{\partial}{\partial x_j}(p)$ ist in jedem Punkt $p\in U$ auf den durch $\varphi_i$ gegebenen Funktionskeim anzuwenden.