Lösungen Blatt5

Aufgabe 1

c) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von 0, $g: U \to \mathbb{R}$ eine C^∞ - Funktion mit $\forall x \in U: |g(x)| \leqslant \|x\|^2$, $\partial: C_0^\infty \to \mathbb{R}$ eine Derivation. Man zeige: $\partial(\overline{g})=0$.
(Dabei ist $\overline{g}$ der durch *g* definierte Funktionskeim in 0)

Zu dieser Zeit war in der Vorlesung schon behauptet worden: Jede Derivation in 0 ist eine Richtungsableitung, d.h. es gibt ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\partial = \partial_v$.

Beweis 1: Inzwischen kennen wir den Beweis dieser Behauptung, der entscheidend benutzt, daß eine Zerlegung $g(x)=g(0)+\sum_{i=1}^{n} h_i(x) x_i$ mit glatten Funktionen h_i für *g* existiert. In unserem Fall folgt aus der Abschätzung für *g* daß $g(0)=0$, also haben wir sogar $g(x)=\sum_{i=1}^{n} h_i(x) x_i$.
Wenn man jetzt zeigen kann, daß für alle *i* $h_i(0)=0$ gilt, sind wir fertig, denn dann folgte $\partial g=\sum_{i=1}^{n} h_i(0)\partial x_i + x_i(0)\partial h_i=0$.
Nehmen wir deshalb oBdA an $h_1(0)\neq 0$ und bilden die Funktion $f(t)=g(t,0,\ldots,0)=t\ h_1(t)$, die in einem offenen Intervall um 0 erklärt und glatt ist. Es ist $|f(t)|=|t||h_1(t)|\leqslant|t|^2$, also $|h(t)|\leqslant|t|$ für $|t|\neq 0$. Aus Stetigkeitsgründen kann dann nur $h_1(0)=0$ gelten. Fertig.

Beweis 2: Benutzen wir die Behauptung aus der Vorlesung und gehen davon aus, daß die gegebene Derivation eine Richtungsableitung ist und berechnen diese, indem wir – siehe unsere Definition von Richtungsableitung – $f(t)=g(tv)$ setzen und damit definitionsgemäß $\partial_v g = f'(0)$ haben.
Nun ist aber $|f(t)|=|g(tv)|\leqslant\|tv\|^2=|t|^2\|v\|^2$. Hieraus folgt sofort $0=\lim_{t\to 0}\left|\frac{f(t)}{t}\right|=|f'(0)|$, also $f'(0)=\partial_v g=0$, fertig.