Analysis III WS07, Aufgabenblatt 5 M. Hortmann									
Name(n)									***Gruppennummer***
Punkte									
1a	b	c	2a	b	c	3a	b	Summe 120%	% bearbeitet

Eine assoziative $\mathbb{R}$ - Algebra mit 1-Element ist ein $\mathbb{R}$ - Vektorraum mit einer bilinearen Multiplikation, für die gilt: $\forall a, b \in A,\ \lambda \in \mathbb{R}: \lambda(ab) = a(\lambda b) = (\lambda a)b$ und einem Einselement **1** der Multiplikation. Man kann einen Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ mit dem Algebraelement $\lambda \mathbf{1}$ identifizieren und somit kann man $\mathbb{R}$ als Untervektorraum und Unterring von A auffassen: man nennt dann Elemente von $\mathbb{R} \subset A$ konstant.

Wenn im folgenden von einer Algebra die Rede ist, soll eine assoziative $\mathbb{R}$ - Algebra mit Einselement gemeint sein. Beispiele von solchen Algebren sind Räume reellwertiger Funktionen und Räume von Funktionskeimen reellwertiger Funktionen, auch Räume quadratischer Matrizen und linearer Selbstabbildungen eines Vektorraums, Polynomringe, aber auch $\mathbb{R}$ selbst ist in natürlicher Weise eine Algebra.

Aus der linearen Algebra sollte der Begriff „Modul über einem Ring" bekannt sein.

Ist A eine Algebra und M ein A-Modul, so ist M auch in natürlicher Weise ein $\mathbb{R}$ - Vektorraum. Eine Derivation ist eine lineare Abbildung $\partial: A \to M$ mit $\forall a, b \in A: \partial(ab) = a(\partial b) + b(\partial a)$. Die Menge der Derivationen $A \to M$ bildet selbst in natürlicher Weise einen Vektorraum.

Ist z.B. C_x^∞ der Raum der glatten Funktionskeime im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ so ist $\mathbb{R}$ in natürlicher Weise der Unterraum der Keime konstanter Funktionen und andererseits ein Modul über C_x^∞ mit der Modulmultiplikation $f \cdot \lambda := f(x) \cdot \lambda$. In diesem Sinne betrachtet man also Derivationen $\partial: C_x^\infty \to \mathbb{R}$, und wir haben in der Vorlesung gesehen, daß die Richtungsableitungen ∂_v bzw. $\partial_{e_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ solche Derivationen sind.

Aufgabe 1

a) Sei A eine Algebra und M ein A-Modul und $\partial: A \to M$ eine Derivation und $c \in \mathbb{R} \subset A$ konstant. Man zeige: $\partial(c) = 0$.

b) Sei $A = \mathbb{R}[X, Y]$ der Polynomring über $\mathbb{R}$ in zwei Veränderlichen. Eine Modulstruktur von $\mathbb{R}$ über A sei gegeben durch $f \cdot \lambda := f(0{,}0) \cdot \lambda$, so daß für eine Derivation $\partial: \mathbb{R}[X, Y] \to \mathbb{R}$ gilt: $\partial(fg) = f(0{,}0) \cdot \partial(g) + g(0{,}0) \cdot \partial(f)$. Man zeige: der Vektorraum der Derivationen $\mathbb{R}[X, Y] \to \mathbb{R}$ ist zweidimensional.

c) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von 0, $g: U \to \mathbb{R}$ eine C^∞ - Funktion mit $\forall x \in U: |g(x)| \leq \|x\|^2$, $\partial: C_0^\infty \to \mathbb{R}$ eine Derivation. Man zeige: $\partial(\overline{g}) = 0$.
(Dabei ist $\overline{g}$ der durch g definierte Funktionskeim in 0)

Aufgabe 2

a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, welches 0 enthält, und $f: I \to \mathbb{R}$ eine C^∞ Funktion mit $f(0) = 0$.
Man zeige: Es gibt eine eindeutig bestimmte C^∞ Funktion $g: I \to \mathbb{R}$ mit $f = x \cdot g$ (d.h. $\forall x \in I: f(x) = xg(x)$). (Analysis II-Stoff)

b) Man benutze a) um zu zeigen: Eine Derivation $\partial: C_0^\infty \to \mathbb{R}$ ist durch ihren Wert auf dem Funktionskeim der Identität bereits eindeutig bestimmt.
c) Der Vektorraum der Derivationen $C_0^\infty \to \mathbb{R}$ ist eindimensional.

Aufgabe 3

a) Man gebe eine C^∞ -Abbildung $\Psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ an, deren Bildmenge der Torus im $\mathbb{R}^3$ mit „großem Radius“ gleich 2 und „kleinem Radius“ gleich 1 ist, deren Funktionalmatrix überall den Rang 2 besitzt und für die gilt $\forall k, l \in \mathbb{Z},\ s, t \in \mathbb{R}: \Psi(s+k, t+l) = \Psi(s, t)$. (Alle Eigenschaften sind zu beweisen.)

b) Sonderaufgabe. Man finde eine C^∞ -Abbildung $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die auf dem obigen Torus den Wert 0 besitzt, innerhalb negativ und außerhalb positiv ist.

(Wer Lust hat, kann statt a) auch die entsprechende Abbildung $\Psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ für eine durchdringungsfreie Kleinsche Flasche konstruieren. (Das geht wesentlich „runder“ als das dreidimensionale Modelll $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit Durchdringung.)