Analysis III WS07, Aufgabenblatt 4
M. Hortmann

Name(n)									*Gruppennummer*
Punkte									
1a	b	c	d	e	f	2	3	Summe 120%	% bearbeitet

1. Man definiere eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ durch $x \sim y$ gdw. $x - y \in \mathbb{Z}$.
Sei *S* die Menge der Äquivalenzklassen und wie üblich $\pi : \mathbb{R} \to S$ gegeben durch $\pi(x) = \overline{x}$.
Versehen mit der Finaltopologie ist *S* in natürlicher Weise ein topologischer Raum.

a) Man zeige, daß *S* kompakt ist.
b) Man zeige: π ist offen.
c) Man zeige: Setzt man $V :=]0,1[$, so ist $\pi : V \to \pi(V) =: U$ ein Homöomorphismus.
(Damit ist die Umkehrabbildung $\varphi : U \to V$ eine Karte auf *S* .)
d) Man gebe einen möglichst kleinen $C^\infty -$ Atlas auf *S* an .
(Dazu gehört natürlich, zu zeigen, daß die Kartenwechselabbildungen C^∞ sind.)
e) Wegen d) ist *S* eine eindimensionale C^∞ - Mannigfaltigkeit, $\mathbb{R}$ ist selbst trivialerweise ebenfalls eine 1-dimensionsionale C^∞ - Mannigfaltigkeit.
Man zeige, daß die Abbildung $\pi : \mathbb{R} \to S$ unendlich oft differenzierbar ist.
f) Man zeige, daß *S* diffeomorph zum Kreis S^1 ist.

2. Man definiere eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2$ durch $x \sim y$ gdw.

$$x_1 - y_1 \in \mathbb{Z} \text{ und } \begin{matrix} x_2 - y_2 \in \mathbb{Z} & \text{wenn} & x_1 - y_1 & \text{gerade} \\ x_2 + y_2 \in \mathbb{Z} & \text{wenn} & x_1 - y_1 & \text{ungerade} \end{matrix} .$$

Sei *K* die Menge der Äquivalenzklassen und wie üblich $\pi : \mathbb{R}^2 \to K$ gegeben durch $\pi(x) = \overline{x}$.
Auch hier ist *K* versehen mit der Finaltopologie in natürlicher Weise ein kompakter topologischer Raum, π ist offen, und setzt man $V :=]0,1[\times]0,1[$, so ist $\pi : V \to \pi(V) =: U$ ein Homöomorphismus. Dies soll hier nicht neu bewiesen werden.

Man gebe jedoch einen (möglichst kleinen) $C^\infty -$ Atlas auf *K* an.
(Schreiben Sie lediglich die Karten und die Kartenwechselabbildungen hin.)

3. Sonderaufgabe. Auf der Sphäre S^3 betrachte man die Abbildung $X := S^3 \to \mathbb{R}^4$, die gegeben ist durch $X(x, y, z, w) = (-z, w, x, -y)$. Offenbar steht $X(a)$ senkrecht auf *a* und ist ebenso wie *a* selbst ein Einheitsvektor. Denkt man sich den Fußpunkt des Vektors $X(a)$ vom Nullpunkt nach *a* verschoben, so hat man damit ein nirgends verschwindendes Vektorfeld auf der S^3 , analog dem durch $(x, y) \to (-y, x)$ gebenen Vektorfeld auf der S^1 .
Zu jedem Punkt $a_0 = (x_0, y_0, z_0, w_0) \in S^3$ finde man eine Kurve $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, die durch a_0 geht, ganz innerhalb der Sphäre S^3 verläuft und eine Stromlinie des Vektorfelds *X* ist, d.h.

$c(0)=a_0$, $\forall t \in \mathbb{R}: c(t) \in S^3$ und $c'(t)=X(c(t))$.
(Nur Nachdenken erforderlich, keine Theorie von Vektorfeldern oder Differentialgleichungen.)