

1. Stereographische Projektion

a) Zu $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ berechne man den eindeutig bestimmten Schnittpunkt $\varphi(u) = x$ der Geraden durch die Punkte $(u_1, \dots, u_n, 0)$ und N mit der S^n . Dadurch erhält man eine bijektive Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow S^n - \{N\}$. Man berechne außerdem die Umkehrabbildung $\psi: S^n - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$

b) Man zeige, daß für alle $u \in \mathbb{R}^n$ der Rang der Jacobi-Matrix von φ in u gleich n ist.

Ich habe nochmal die Formel $x_i = \frac{2u_i}{\|u\|^2 + 1}$ für $1 \leq i \leq n$ und $x_{n+1} = \frac{\|u\|^2 - 1}{\|u\|^2 + 1}$ nachgerechnet.

Man errechnet via Quotientenregel für $1 \leq i, j \leq n$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(u) = \begin{cases} \frac{2}{1 + \|u\|^2} \left(1 - \frac{2u_j^2}{1 + \|u\|^2} \right) & \text{für } i = j \\ \frac{2}{1 + \|u\|^2} \left(\frac{-2u_i u_j}{1 + \|u\|^2} \right) & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

sowie $\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial u_i}(u) = \left(\frac{2}{1 + \|u\|^2} \frac{2}{1 + \|u\|^2} \right) u_i$, also ergibt sich für die Jacobi-Matrix

$$J\varphi(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial u_n} \end{pmatrix}(u) = \frac{2}{1 + \|u\|^2} \left(\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{1 + \|u\|^2} \begin{pmatrix} -u_1 u_1 & \dots & -u_1 u_n \\ \vdots & & \vdots \\ -u_n u_1 & \dots & -u_n u_n \\ u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix} \right)$$

Daß diese Matrix den Rang n besitzt, rechnet man im Fall $n=1$ und $n=2$ direkt nach; der Fall $n=2$ ist ja auch schon interessant. Im allgemeinen muß man zeigen, daß eine quadratische Untermatrix nicht singular ist, also eine Determinante ungleich Null besitzt.

Um zu zeigen, daß z.B. die aus den ersten n Zeilen gebildete quadratische Matrix den Rang n besitzt, stellt man zunächst fest, daß sie bis auf den von Null verschiedenen Vorfaktor $\frac{2}{1 + \|u\|^2}$

die Form $\begin{pmatrix} 1 - a_1 a_1 & -a_1 a_2 & \dots & -a_1 a_n \\ a_2 a_1 & 1 - a_2 a_2 & \dots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n a_1 & -a_n a_2 & \dots & 1 - a_n a_n \end{pmatrix}$ besitzt, wobei hier $a_i = u_i \sqrt{\frac{2}{1 + \|u\|^2}}$.

Durch Ausrechnen der Fälle $n=1,2$ kommt man darauf, daß diese Determinante den Wert

$$1 - \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1 - \frac{2\|u\|^2}{1 + \|u\|^2} = \frac{1 - \|u\|^2}{1 + \|u\|^2}$$

besitzt¹. Dieser Ausdruck ist wird offenbar genau auf dem Rand

des Einheitskreises Null. In solchen Punkten muß man also weitere Unterdeterminanten betrachten. Gehen wir also davon aus, daß $\|u\|=1$ und oBdA $u_n \neq 0$ und betrachten die Unterdeterminante

$$\begin{vmatrix} 1 - a_1 a_1 & -a_1 a_2 & \dots & -a_1 a_n \\ a_2 a_1 & 1 - a_2 a_2 & \dots & -a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & 1 - a_{n-1}^2 & -a_{n-1} a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Durch Betrachten der Fälle $n=1,2$ kommt man wunderbarerweise auch unabhängig von der Voraussetzung $\|u\|=1$ darauf, daß der Wert dieser Determinante gleich $u_n \neq 0$ ² ist!

1 Einfacher Beweis mit elementaren Umformungen.
2 Wieder ein einfacher Beweis durch elementare Umformungen.

Berechnung der Inversen:

Es erweist sich als opportun, den \mathbb{R}^{n+1} als $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ zu bezeichnen, also ein Element des \mathbb{R}^{n+1} als (x, z) zu schreiben mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $z \in \mathbb{R}$. Mit dieser Schreibweise ist $\varphi(u) = (x, z)$, wobei $x = \frac{2}{1 + \|u\|^2} u$ und $z = \frac{\|u\|^2 - 1}{\|u\|^2 + 1}$. Durch „Malen“ kommt man zur Umkehrung

$$\psi(x, z) = \frac{x}{1 - z}, \text{ und man überprüft dann leicht wegen } 1 - z = 1 - \frac{\|u\|^2 - 1}{\|u\|^2 + 1} = \frac{2}{\|u\|^2 + 1}, \text{ daß}$$

tatsächlich $(\psi \circ \varphi)(u) = \psi\left(\frac{2}{\|u\|^2 + 1} u, \frac{\|u\|^2 - 1}{\|u\|^2 + 1}\right) = u$. Es wurde also gezeigt: $\psi \circ \varphi = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$, wobei

$\psi: \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} - \{1\}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ offenbar beliebig oft differenzierbar auf der offenen Teilmenge $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} - \{1\})$ des $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ist. Dabei ist $\text{Im } \varphi = S^2 - \{N\} \subset \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} - \{1\})$.

Nach Kettenregel gilt dann für alle $u \in \mathbb{R}^n$: $D\psi(\varphi(u)) \circ D\varphi(u) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$. Eine Verknüpfung linearer Abbildungen besitzt also den Rang n . Dann kann die erste von ihnen, nämlich $D\varphi(u)$, nicht einen Rang kleiner als n besitzen, als Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ natürlich auch keinen größeren!

Also waren unsere wunderschönen Determinantenrechnungen überflüssig!

2. Mercator-Projektion

Der Einfachheit halber beschränke ich mich auf den Fall der S^3 und untersuche die Abbildung $\Phi: I \times J \times J \rightarrow \mathbb{R}^4$ $(\varphi, \theta_1, \theta_2) \rightarrow (\cos \varphi \cos \theta_1 \cos \theta_2, \sin \varphi \cos \theta_1 \cos \theta_2, \sin \theta_1 \cos \theta_2, \sin \theta_2)$, also $x_1 = \cos \varphi \cos \theta_1 \cos \theta_2$, $x_2 = \sin \varphi \cos \theta_1 \cos \theta_2$, $x_3 = \sin \theta_1 \cos \theta_2$, $x_4 = \sin \theta_2$. Auch hier könnte man jetzt wunderschön „zu Fuß“ beweisen, daß sämtliche Ableitungen den Rang 3 besitzen.

Stattdessen berechnen wir wie oben die Inverse.

Vorüberlegung: die Cotangensfunktion ist wohldefiniert im offenen Intervall $]0, \pi[$ und es ist $\text{cot}:]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv, beliebig oft differenzierbar, und dasselbe gilt für die Umkehrfunktion

$$\text{arccot}: \mathbb{R} \rightarrow]0, \pi[. \text{ Für } x_2 > 0 \text{ ist demnach } \varphi = \text{arccot} \frac{x_1}{x_2}. \text{ Außerdem ist } \theta_2 = \arcsin x_4.$$

Offenbar ist $\cos \theta_2 = \sqrt{1 - x_4^2}$, so daß $\theta_1 = \arcsin \frac{x_3}{\sqrt{1 - x_4^2}}$.

Wir betrachten also die folgende Teilmenge des \mathbb{R}^4

$$U := \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 > 0, x_4^2 < 1, \frac{x_3^2}{1 - x_4^2} < 1 \right\}.$$

Diese ist als Durchschnitt der folgenden beiden!! offenen Mengen selbst offen:

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 > 0 \right\}, \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_3^2 + x_4^2 < 1 \right\}.$$

(Die beiden Mengen sind offen, weil sie offenbar Urbilder offener Intervalle unter stetigen Funktionen sind!)

Offenbar ist fast die halbe S^3 Teilmenge von U , genauer $S^3 - \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 > 0\}$

Auf U definieren wir die beliebig oft differenzierbare Abbildung

$$\Psi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\varphi, \theta_1, \theta_2) = \left(\operatorname{arccot} \frac{x_1}{x_2}, \arcsin \frac{x_3}{\sqrt{1-x_4^2}}, \arcsin x_4 \right)$$

Schränkt man Φ auf die Menge $]0, \pi[\times]-\pi/2, \pi/2[\times]-\pi/2, \pi/2[$, so erhält man als Bildmenge dieser eingeschränkten Abbildung gerade die oben beschriebene Halbsphäre.

Damit ist $\Psi \circ \Phi$ auf $]0, \pi[\times]-\pi/2, \pi/2[\times]-\pi/2, \pi/2[$ die Identität, und wir haben wieder, daß die Ableitung von Φ überall Rang 3 besitzen muß.

Indem man die Arccot-Funktion auf $] \pi, 2\pi[$ betrachtet und für $x_1 < 0$ analog die Arcustangensfunktion, erhalten wir weitere Halbsphären, die den gesamten Bildbereich der ursprünglich gegebenen Abbildung Φ überdecken.

Darüber denke man aber erst nach, wenn das Vorherige verstanden ist.