Analysis III WS07, Aufgabenblatt 3

M. Hortmann

Name(n)							Gruppennummer
Punkte							
1a	b	2a	b	3a	b	Summe	% bearbeitet

Sei $S^n := \left\{ x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$ die n-dimensionale Einheitssphäre, $\mathrm{N} := (0, \ldots, 0, 1)$ der „Nordpol", entsprechend $\mathrm{S} := (0, \ldots, 0, -1)$ der Südpol.

1. Stereographische Projektion

a) Zu $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ berechne man den eindeutig bestimmten Schnittpunkt $\varphi(u) = x$ der Geraden durch die Punkte $(u_1, \ldots, u_n, 0)$ und N mit der S^n. Dadurch erhält man eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to S^n - \{N\}$. Man berechne außerdem die Umkehrabbildung $\psi : S^n - \{\mathrm{N}\} \to \mathbb{R}^n$

b) Man zeige, daß für alle $u \in \mathbb{R}^n$ der Rang der Jacobi-Matrix von φ in u gleich n ist.

2. Mercator Projektion

Sei $J :=]-\pi/2, \pi/2[$.

a) Man zeige für $n \in \mathbb{N}$: Durch $\Phi_n(x, \theta) := ((\cos\theta) x, \sin\theta)$ wird eine bijektive Abbildung $\Phi_n : S^n \times J \to S^{n+1} - \{\mathrm{N,S}\}$ definiert.

Sei $I :=]0, 2\pi[$. Durch $\Phi_0(\varphi) := (\cos\varphi, \sin\varphi)$ wird eine bijektive Abbildung $\Phi_0 : I \to S^1 - \{(1,0)\}$ definiert.

b) Schreiben Sie den Ausdruck $\Psi_3(\varphi, \theta_1, \theta_2) := \Phi_2\big(\Phi_1\big(\Phi_0(\varphi), \theta_1\big), \theta_2\big)$ konkret hin!
Offenbar wird durch Ψ_3 eine injektive Abbildung $\Psi_3 : I \times J \times J \to S^3$ definiert.
Beschreiben Sie die Menge $S^3 - \mathrm{Im}\,\Psi_3$.
Zeigen Sie, daß der Rang der Jacobi-Matrix von Ψ_3 überall gleich 3 ist.

3. Man betrachte den reellen projektiven Raum $\mathbb{P}^n$, sowie die kanonische Projektion $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n$, $\pi(x_0, \ldots, x_n) \to [x_0, \ldots, x_n]$. Als Topologie auf $\mathbb{P}^n$ betrachte man die durch π gegebene Finaltopologie.

a) Man zeige: die durch $\psi_i([x_0, \dots, x_n]) := \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$ gebene Abbildung $\psi_i := U_i \to \mathbb{R}^n$ ist ein Homöomorphismus.
(Zur Vereinfachung der Notation beweise man dies nur für i=0.)

b) Man berechne für n=2 die durch $\chi_0^1 := \psi_1 \circ \psi_0^{-1}$ gegebene bijektive Abbildung χ_0^1 der Menge $\left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \middle| x_1 \neq 0 \right\} = \psi_1(U_0 \cap U_1) = \psi_0(U_0 \cap U_1)$ in sich und zeige für n=2, daß die Jacobi-Matrix dieser Abbildung in jedem Punkt den Rang 2 besitzt.