Lösung Blatt 2 Aufg. 1b

1. Zu einem Banachraum E betrachte man wie in Aufgabenblatt 1 den Banachraum $A:=\mathscr{L}(E,E)$. Die Abbildung $\Phi: A\times A\to A$, $(\varphi,\psi)\to\varphi\circ\psi$ ist offenbar bilinear.

b) Es wurde gezeigt, daß die Teilmenge $U\subset A$ derjenigen Abbildungen, die eine stetige Inverse besitzen, offen in A ist. Offenbar ist die durch $\varphi\to\varphi^{-1}$ gegebene Inversionsabbildung $\Psi: U\to U$ bijektiv. Man zeige, daß Ψ stetig ist.

Bemerkung: Ist $E=\mathbb{R}$, so ist A kanonisch isomorph zu $\mathbb{R}$ (Raum der 1x1-Matrizen), und bei der Abbildung Φ handelt es sich um die Multiplikation in $\mathbb{R}$. Offenbar ist dann $U=\mathbb{R}-\{0\}$ und die Abbildung Ψ ist die Inversenbildung in $\mathbb{R}$, deren Stetigkeit wir seinerzeit gezeigt hatten. Im Prinzip sollte hier derselbe Beweis funktionieren.

Sei also $\varphi_0\in U$. Es soll gezeigt werden, daß Ψ stetig in φ_0 ist.

Sei demnach $\epsilon>0$ vorgegeben.
Zu finden ist ein $\delta>0$, so daß für $\|\varphi-\varphi_0\|<\delta$ folgt daß $\|\Psi(\varphi)-\Psi(\varphi_0)\|<\epsilon$

Wie später ersichtlich wird, sollte man $\delta:=\min\left\{\frac{1}{2\|\varphi_0^{-1}\|},\frac{1}{2\|\varphi_0^{-1}\|^2}\right\}$ setzen.

Dann ist zunächst
$$\|\Psi(\varphi)-\Psi(\varphi_0)\|=\|\varphi^{-1}-\varphi_0^{-1}\|=\|\varphi^{-1}\circ(\varphi-\varphi_0)\circ\varphi_0^{-1}\|\leqslant\|\varphi^{-1}\|\|\varphi-\varphi_0\|\|\varphi_0^{-1}\|$$

Stören tut hierbei nur der Term $\|\varphi^{-1}\|$. Dazu rechnet man

a) $\varphi=\varphi_0-(\varphi_0-\varphi)=\varphi_0\circ(\mathrm{id}_E-(\mathrm{id}_E-\varphi_0^{-1}\circ\varphi))=\varphi_0\circ(\mathrm{id}_E-\psi)$ mit

b) $\psi:=\mathrm{id}_E-\varphi_0^{-1}\circ\varphi=\varphi_0^{-1}\circ(\varphi_0-\varphi)$ und somit

c) $\|\psi\|=\|\varphi_0^{-1}\circ(\varphi_0-\varphi)\|\leqslant\|\varphi_0^{-1}\|\|\varphi_0-\varphi\|\leqslant\|\varphi_0^{-1}\|\delta\leqslant 1/2$

Lt. Blatt 1 besitzt jetzt $\mathrm{id}_E-\psi$ eine stetige Inverse χ , nämlich $\chi=\sum_{n=0}^{\infty}\psi^n$, und es gilt
$$\|\chi\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\|\psi^n\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\|\psi\|^n\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}(1/2)^n=2 \quad .$$

Damit hat man aus Zeile a)
$$\varphi^{-1}=\left(\varphi_0\circ(\mathrm{id}_E-\psi)\right)^{-1}=(\mathrm{id}_E-\psi)^{-1}\circ\varphi_0^{-1}=\chi\circ\varphi_0^{-1}$$

und weiter $\|\varphi^{-1}\|\leqslant\|\chi\|\|\varphi_0^{-1}\|\leqslant 2\|\varphi_0^{-1}\|$

Letztlich ergibt sich
$$\|\Psi(\varphi)-\Psi(\varphi_0)\|=\ldots\|\varphi^{-1}\|\|\varphi-\varphi_0\|\|\varphi_0^{-1}\|<2\|\varphi_0^{-1}\|^2\delta\leqslant\epsilon$$