Analysis III WS07, Aufgabenblatt 2 **M. Hortmann**							
Name(n)							***Gruppennummer***
Punkte							
1a	b	2a	b	c	3	Summe	% bearbeitet

1. Zu einem Banachraum E betrachte man wie in Aufgabenblatt 1 den Banachraum $A := \mathscr{L}(E, E)$. Die Abbildung $\Phi : A \times A \to A$, $(\varphi, \psi) \to \varphi \circ \psi$ ist offenbar bilinear.

a) Man zeige, daß Φ stetig ist.

b) Es wurde gezeigt, daß die Teilmenge $U \subset A$ derjenigen Abbildungen, die eine stetige Inverse besitzen, offen in A ist. Offenbar ist die durch $\varphi \to \varphi^{-1}$ gegebene Inversionsabbildung $\Psi : U \to U$ bijektiv. Man zeige, daß Ψ stetig ist.

Bemerkung: Ist $E = \mathbb{R}$, so ist A kanonisch isomorph zu $\mathbb{R}$ (Raum der 1x1-Matrizen), und bei der Abbildung Φ handelt es sich um die Multiplikation in $\mathbb{R}$. Offenbar ist dann $U = \mathbb{R} - \{0\}$ und die Abbildung Ψ ist die Inversenbildung in $\mathbb{R}$, deren Stetigkeit wir seinerzeit gezeigt hatten. Im Prinzip sollte hier derselbe Beweis funktionieren.

c) freiwillige Sonderaufgabe: Betrachtet man die Abbildungsverknüpfung $X = \Phi \circ \begin{pmatrix} \mathrm{id}_E \\ \Psi \end{pmatrix} : U \to A$,

so gilt für alle $\varphi \in U$: $X(\varphi) = \Phi\left(\begin{pmatrix} id_E \\ \Psi \end{pmatrix}(\varphi)\right) = \Phi\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^{-1} \end{pmatrix} = \varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_E$. X ist also konstant,

und damit differenzierbar, und besitzt daher die Nullabbildung des Raums $\mathscr{L}(A, A)$ als Ableitung. Andererseits kann man die Ableitung $D X(\varphi)$ auch mit Hilfe der Kettenregel ausrechnen, wenn man voraussetzt, daß Ψ in ganz U differenzierbar ist. In der Kettenregel-Gleichung taucht dann u.a. $D\Psi(\varphi)$ auf, und man kann diesen Ausdruck isolieren.

Berechnen Sie auf diese Weise $D\Psi(\varphi)$.

Hinweis: Dazu müssen Sie wissen, wie man eine bilineare Abbildung differenziert. Beachten Sie auch, daß $D\Psi(\varphi) \in \mathscr{L}(A, A)$. Ein Element $\sigma \in \mathscr{L}(A, A)$ wird ggf. spezifiziert, indem man für ein beliebiges $\psi \in A = \mathscr{L}(E, E)$ und ein $\zeta \in E$ angibt, wie $\big((\sigma(\psi))(\zeta)\big) \in E$ aussieht.

Bemerkung: Nachdem man dann weiß, wie die Ableitung von Ψ aussehen muß, wäre der ϵ, δ - Beweis zu führen, daß sie es auch ist. Dabei werden keine anderen Tricks angewandt als vorher im Eindimensionalen. Im übrigen wäre mit der Differenzierbarkeit von Ψ natürlich auch die Stetigkeit aus b) bewiesen.

2. a) Sei $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = x^3 - x^2 y + y^3 - 5$. Offenbar besitzt *f* im Punkt $(2,1)$ eine Nullstelle. Begründen Sie, warum dadurch in einem offenen Intervall *I* um 2 eine implizite Funktion $g: I \to \mathbb{R}$ gegeben ist mit $g(2) = 1$, und berechnen Sie deren Ableitung.

b) Sei $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) = x^3 - x^2 y + y^3 + z^3 + xyz - 2$. Offenbar besitzt *f* im Punkt $(-2,3,1)$ eine Nullstelle. Begründen Sie, warum dadurch in einer offenen Umgebung *U* von $(-2,3)$ eine implizite Funktion $g: U \to \mathbb{R}$ gegeben ist mit $g(-2,3) = 1$, und berechnen Sie deren Ableitung.

c) Sei $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x,y,z) = \left(-x^2 + xyz + y^2 z^2 + 1 \,,\; x^2 - y^2 - z^2 - 2\right)$. Offenbar besitzt *f* im Punkt $(2,1,1)$ eine Nullstelle. Begründen Sie, warum dadurch in einem offenen Intervall *I* um 2 eine implizite Funktion $g: I \to \mathbb{R}^2$ gegeben ist mit $g(2) = (1,1)$, und berechnen Sie deren Ableitung.

3. Sei $\tilde{\tilde{f}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\tilde{\tilde{f}}(x) = x^3 + x + 1$. Gesucht wird $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{\tilde{f}}(x) = 4$. Orientieren wir uns am Beweis des Satzes über die Umkehrfunktion: Es ist $\tilde{\tilde{f}}(1) = 3$. Also setzen wir $\tilde{f}(x) = \tilde{\tilde{f}}(x+1) - 3 = x^3 + 3x^2 + 4x$. Weil aber $\tilde{f}'(x) = 3x^2 + 6x + 4$ und daher $\tilde{f}'(0) = 4$ betrachte man stattdessen $f(x) = x^3/4 + 3x^2/4 + x$ und hat jetzt $f'(0) = 1$. Wie beim Beweis des Umkehrsatzes haben wir jetzt *f* (0)=0 und *f* '(0)=1.

Man kann damit rechnen (wieso?), daß $g_y(x) = y + x - f(x)$ für $y = 1/4$ in einer Umgebung von 0 einen eindeutig bestimmten Fixpunkt besitzt.

Starten Sie also die Iteration $x_0 = 0$, $x_{n+1} = g_y(x_n)$ und berechnen den Fixpunkt, also die Lösung der Gleichung $f(z) = 1/4$ mit einer Genauigkeit von 10 Stellen. Rechnen Sie dann zurück und geben den entsprechenden Näherungswert für die Lösung von $x^3 + x + 1 = 4$. (Probe!)

(Bemerkungen:
0. Taschenrechner müßte reichen.
1. das Newtonverfahren wäre effizienter gewesen; es geht aber um das Verständnis der im Umkehrsatz benutzen Konstruktion.
2. Führen Sie eine analoge Rechnung für eine Ausgangsfunktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch.)