Aufgabenblatt 1

1. Seien E , F Banachräume. Man zeige: Eine surjektive stetige lineare Abbildung $\varphi : E \to F$ besitzt genau dann eine stetige Inverse, wenn $\inf_{\|x\|=1} \|\varphi(x)\| > 0$.

a) Sei $\varphi : E \to F$ stetig und besitze eine Inverse $\psi : F \to E$, die ebenfalls stetig ist. Wäre jetzt $\inf_{\|x\|=1} \|\varphi(x)\| = 0$, so gäbe es eine Folge (x_n) in E , mit $\|x_n\| = 1$ und $0 < \|\varphi(x_n)\| \leqslant 1/n$. Man setze jetzt $z_n = \varphi(x_n)$. Dann ist $\psi(z_n) = x_n$ und $0 < \|z_n\| \leqslant 1/n$. Setzt man weiter $y_n = z_n / \|z_n\|$, so ist $\|y_n\| = 1$ und $\|\psi(y_n)\| = \|\psi(z_n)\| / \|z_n\| = \|x_n\| / \|z_n\| \geqslant 1/n$. Daher kann nicht $\sup_{\|y\| \leqslant 1} \|\psi(y)\| < \infty$ gelten, was aber eine der äquivalenten Bedingungen dafür ist, daß ψ stetig ist.

b) Sei umgekehrt $\varphi : E \to F$ surjektiv und stetig und $\inf_{\|x\|=1} \|\varphi(x)\| > 0$. Wäre *f* nicht injektiv, so gäbe es ein Element $z \neq 0$ mit $\varphi(z) = 0$. Setzt man $x = z / \|z\|$, so folgt $\|x\| = 1$ und $\varphi(x) = 0$. Daher wäre das Infimum gleich Null. Wegen diesem Widerspruch ist φ also injektiv, damit also bijektiv und besitzt daher eine Inverse ψ . Es bleibt zu zeigen, daß ψ stetig ist. Die Begründung verläuft mit ähnlicher Argumentation wie in a): Wäre ψ nicht stetig, so gäbe es eine Folge (z_n) mit $\|z_n\| \leqslant 1$ und $\|\psi(z_n)\| \to \infty$. Setzt man $x_n = z_n / \|z_n\|$, so folgt $\|y_n\| = 1$ und $\|\psi(y_n)\| \to \infty$. Setzt man $w_n = \psi(y_n)$ und $x_n = w_n / \|w_n\|$, so folgt $\|x_n\| = 1$ und $\|\varphi(x_n)\| = \|\varphi(w_n)\| / \|w_n\| = \|y_n\| / \|w_n\| = 1 / \|w_n\|$. $\|(\varphi(x_n))\|$ ist also eine Nullfolge, daher kann nicht $\inf_{\|x\|=1} \|\varphi(x)\| > 0$ gelten. Mit diesem Widerspruch ist ψ stetig.

3. Man setze $U := \{\varphi \in A \mid \varphi \text{ besitzt eine stetige Inverse}\}$.
Offenbar ist $\mathrm{id}_E \in U$, daher $U \neq \emptyset$.

Es wurde vorher folgendes gezeigt:
Jedes Element von $U_1(\mathrm{id}_E)$ besitzt ein stetiges Inverses, und daher ist $U_1(\mathrm{id}_E) \subset U$, mit anderen Worten: um das Element id_E gibt es eine offene Kugel, die ganz in U liegt.

b) Folgern Sie, daß es um **<u>jedes</u>** Element $\varphi_0 \in U$ eine offene Umgebung gibt, die ganz in U liegt! (Hinweis: Benutzen Sie u.a. die Abbildung $A \to A$, $\chi \to \varphi_0^{-1} \circ \chi$, für welche $\varphi_0 \to \mathrm{id}_E$ und führen damit die Behauptung auf den Fall a) zurück.)

Sei also $\Phi : A \to A$, $\Phi(\chi) = \varphi_0^{-1} \circ \chi$.
Offenbar ist $\Phi(\varphi_0) = id_E$, und Φ ist linear und stetig. Da mit $\Psi(\psi) := \varphi_0 \circ \psi$ offenbar $\Phi^{-1} = \Psi$ gilt und Ψ ebenfalls stetig ist, ist Φ bijektiv, offen und stetig. Wir setzen $U_1 := \Phi^{-1}(U_1(id_E))$ und haben damit eine offene Umgebung von φ_0 konstruiert.

Es soll gezeigt werden, daß jedes Element $\chi \in U_1$ eine stetige Inverse besitzt:
Zunächst folgt aus $\chi \in U_1$, daß $\varphi_0^{-1} \circ \chi = \Phi(\chi) \in U_1(id_E)$ und damit $\varphi_0^{-1} \circ \chi$ eine stetige Inverse ψ besitzt. Weil $\varphi_0^{-1} \circ \chi$ bijektiv ist und φ_0 bijektiv ist, ist auch

$\chi = \varphi_0 \circ (\varphi_0^{-1} \circ \chi)$ bijektiv . Es ist also $id_E = \psi \circ (\varphi_0^{-1} \circ \chi) = (\psi \circ \varphi_0^{-1}) \circ \chi$. $\psi \circ \varphi_0^{-1}$ ist ebenfalls bijektiv und natürlich auch stetig, und ist auf Grund der letzten Gleichung die Inverse von χ !

Insgesamt wurde damit gezeigt, daß U offen in $\mathscr{L}(E, E)$ ist, denn U läßt sich ja jetzt schreiben als $U = \bigcup_{\varphi_0 \in U} U_1(\varphi_0)$.