Analysis III WS07, Aufgabenblatt 1 **M. Hortmann**						
Name(n)						***Gruppennummer***
Punkte						
1	2	3a	b	4	Summe	% bearbeitet

1. Seien E , F Banachräume. Man zeige: Eine surjektive stetige lineare Abbildung $\varphi : E \to F$ besitzt genau dann eine stetige Inverse, wenn $\inf\limits_{\|x\|=1} \|\varphi(x)\| > 0$.

2. Ist E ein Banachraum, so ist $A := \mathscr{L}(E, E)$ bekanntlich ebenfalls ein Banachraum mit der Norm $\|\varphi\| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|\varphi(x)\|$. Man zeige: Sind $\varphi, \psi \in A$, so ist $\|\varphi \circ \psi\| \leqslant \|\varphi\| \|\psi\|$.

3. Man setze $U := \left\{ \varphi \in A \middle| \varphi \text{ besitzt eine stetige Inverse} \right\}$. Es ist $U \subset A$.
Offenbar ist $\mathrm{id}_E \in U$, daher $U \neq \emptyset$. Für $\varphi \in A$ setzt man $\varphi^0 = \mathrm{id}_E$ und $\varphi_{n+1} = \varphi \circ \varphi^n$

a) Man zeige: Ist $\varphi \in A$, $\|\varphi\| < 1$, also $\varphi \in U_1(0) \subset A$, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi^n$ in A , und für ihren Grenzwert ψ gilt: $(\mathrm{id}_E - \varphi) \circ \psi = \psi \circ (\mathrm{id}_E - \varphi) = \mathrm{id}_E$.

Jedes Element von $U_1(\mathrm{id}_E)$ besitzt also ein stetiges Inverses, und daher ist $U_1(\mathrm{id}_E) \subset U$, mit anderen Worten: um das Element id_E gibt es eine offene Kugel, die ganz in U liegt.

b) Folgern Sie, daß es um **<u>jedes</u>** Element $\varphi_0 \in U$ eine offene Umgebung gibt, die ganz in U liegt! (Hinweis: Benutzen Sie u.a. die Abbildung $A \to A$, $\chi \to \varphi^{-1} \circ \chi$, welche φ auf id_E abbildet und führen damit die Behauptung auf den Fall a) zurück.)

Insgesamt wurde damit bewiesen, daß U offen in $\mathscr{L}(E, E)$ ist.
(Wie könnte man im Falle $E = \mathbb{R}^n$ dieses Ergebnis mit Hilfe der Determinante zeigen?)

4. Sei E ein Banachraum und $B_r(0) := \left\{ x \in E \middle| \|x\| \leqslant r \right\}$ die abgeschlossene Kugel mit Radius r um den Nullpunkt von E. Ist dann $f : B_r(0) \to E$ eine Abbildung mit

$$\forall x, y \in B_r(0): \ \|f(x) - f(y)\| \leqslant b \|x - y\| \quad \text{für ein } b \in \mathbb{R},\ 0 < b < 1 \quad \text{und}$$
$$\|f(0)\| \leqslant r(1-b) \ ,$$

so zeige man: f besitzt genau einen Fixpunkt.
Bemerkung: Es ist ja keineswegs vorausgesetzt, daß $f\left(B_r(0)\right) \subset B_r(0)$; also hat man nicht die Ausgangssituation des Banachschen Fixpunktsatzes.