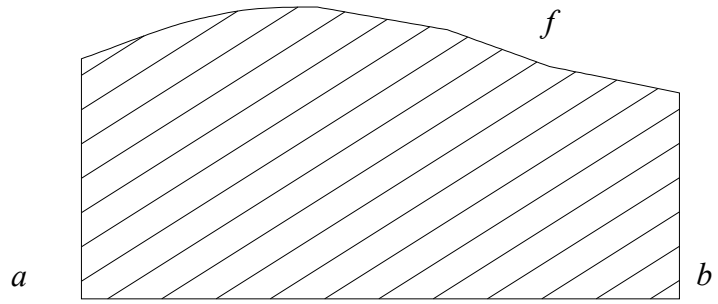
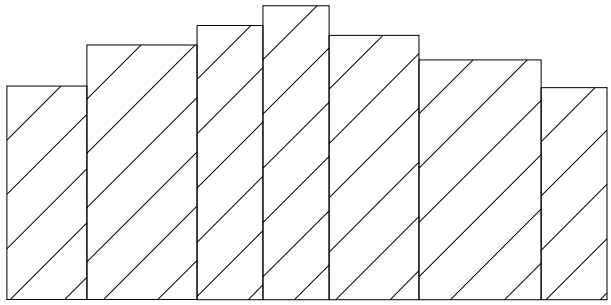
Riemann Integral

Wir betrachten zunächst Abbildungen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, also auf einem abgeschlossenen Intervall definierte reellwertige Funktionen.



Für solche Funktionen möchte man nach Möglichkeit, wie in der obigen Zeichnung, die Fläche unter dem Graphen von f berechnen. Es stellt sich heraus, daß dies für besonders „wilde“ Funktionen nicht gut möglich ist, aber das Bild legt nahe, daß es zumindest für stetige Funktionen kein Problem geben sollte.

Man geht davon aus, daß der Flächeninhalt eines Rechtecks das Produkt der Seitenlängen ist. Wenn man eine Figur genau aus Rechtecken überlappungsfrei zusammensetzen kann, würde man die Flächeninhalte der Einzelrechtecke aufaddieren:



Bei einer stetigen Funktion sollte man dann die Fläche durch Verfeinerungen der Unterteilung des Grundintervalls approximieren können.

Bei der Abwicklung dieses Programms erweisen sich die folgenden Definitionen als sinnvoll:

Eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ des Intervalls [*a*,*b*] ist eine endliche geordnete Menge von Punkten $a=a_0<\ldots<a_n=b$. Ist zu einer Zerlegung $\mathfrak{Z}=(a_0,\ldots,a_n)$ eine Wertemenge $c=(c_1,\ldots,c_n)$ gegeben, so definiert man die Riemannsumme $S(\mathfrak{Z},c)=\sum_{i=1}^{n} c_i(a_i-a_{i-1})$. Im letzten Bild entspräche dies der Gesamtfläche der dort versammelten Rechtecke.

Eine Menge von Stützstellen zu einer Zerlegung $\mathfrak{Z}=(a_0,\ldots,a_n)$ ist eine geordnete Menge $\zeta=(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ mit $\zeta_i\in[a_{i-1},a_i]$. Man definiert dann die Riemannsumme

$$S(\mathfrak{Z},\zeta,f):=\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(a_i-a_{i-1})$$

Die „Feinheit“ $|\mathfrak{Z}|$ ist definiert durch $|\mathfrak{Z}|:=\max_{1\leq i\leq n}\{a_i-a_{i-1}\}$.

Man nennt nun die Funktion f Riemann-integrierbar, wenn es eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ gibt, für die gilt:
$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathfrak{Z}, \zeta : |\mathfrak{Z}| < \delta \rightarrow |S(\mathfrak{Z}, \zeta, f) - M| < \epsilon$.

Den Grenzwert M, der dann natürlich eindeutig bestimmt ist, nennt man Riemann-Integral von f und schreibt

$$M = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$$

Eine Funktion ist also Riemann-integrierbar, wenn ihre Riemann Summen bei wachsender Feinheit der Zerlegungen konvergieren.

Wir zeigen als erstes den **Satz**, daß stetige Funktionen Riemann-integrierbar sind.
Als Hilfsbegriff benötigen wir die *gleichmäßige Stetigkeit*:

Ist $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen, so nennt man sie *gleichmäßig stetig*, wenn $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in M : d(x, y) < \delta \rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Man vergleich dies mit der Stetigkeit: f ist stetig, wenn
$\forall \epsilon > 0 \forall x \in M \exists \delta > 0 \forall y \in M : d(x, y) < \delta \rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$

Offenbar ist eine gleichmäßig stetige Abbildung auch stetig.
Bei stetigen Abbildungen findet man δ in Abhängigkeit von ϵ, x , während bei gleichmäßig stetigen Abbildungen δ nur von ϵ abhängt und dann für alle x funktioniert.

In der Vorlesung wurde gezeigt, daß unter der Voraussetzung, daß M kompakt ist, jede stetige Abbildung $M \rightarrow N$ auch gleichmäßig stetig ist. Insbesondere ist dann eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem endlichen abgeschlossenen Intervall gleichmäßig stetig.

Wir gehen aus von einer beliebigen Folge immer feiner werdender Zerlegung des Intervalls $[a,b]$, also z.B. $\mathfrak{Z}^n$ mit $a_i^n = a + i(b-a)/2^n$, $0 \leqslant i \leqslant 2^n$ und Stützstellen $\zeta_i^n = a + i(b-a)/2^n$, $1 \leqslant i \leqslant 2^n$. Diese speziellen Zerlegungen, die durch sukzessive Halbierungen des Intervalls $[a,b]$ entstehen, erweisen sich für die folgende Rechnung als besonders geeignet, da die Randpunkte und Stützstellen der jeweils feineren Zerlegungen in denen der vorhergehenden gröberen Zerlegungen enthalten sind.
Wir nehmen dann die Riemann-Summen $S^n := S(\mathfrak{Z}^n, \zeta^n, f)$ und müssen nachweisen, daß diese eine Cauchyfolge bilden. Später wird dann auch nachzuweisen sein, daß der Grenzwert M die Bedingungen für das Riemann-Integral erfüllt.

Sei jetzt $m > n$. Dann ist

$$|S^m - S^n| = |b-a| \left| \sum_{i=1}^{2^m} \frac{f(a + \frac{i}{2^m}(b-a))}{2^m} - \sum_{i=1}^{2^n} \frac{f(a + \frac{i}{2^n}(b-a))}{2^n} \right|$$

Nun möchte man die Differenzen in die Summe hineinziehen.
Dabei nutzt man, daß die Stützstellen der kleineren Summe sämtlich auch solche der größeren Summe sind. Auf einen Summanden der kleineren Summe kommen 2^{m-n} Summanden der größeren. Man rechnet also weiter:

$$=\left|\frac{|b-a|}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}\left\{\frac{1}{2^{m-n}}\sum_{j=1}^{2^{m-n}}\left[f\left(a+\frac{(i-1)2^{m-n}+j}{2^m}(b-a)\right)\right]-f\left(a+\frac{i}{2^n}(b-a)\right)\right\}\right|=$$

$$\left|\frac{|b-a|}{2^m}\sum_{i=1}^{2^n}\left\{\sum_{j=1}^{2^{m-n}}\left[f\left(a+\frac{(i-1)2^{m-n}+j}{2^m}(b-a)\right)-f\left(a+\frac{i}{2^n}(b-a)\right)\right]\right\}\right|\leqslant$$

$$\left|\frac{|b-a|}{2^m}\sum_{i=1}^{2^n}\left\{\sum_{j=1}^{2^{m-n}}\left|f\left(a+\frac{(i-1)2^{m-n}+j}{2^m}(b-a)\right)-f\left(a+\frac{i2^{m-n}}{2^m}(b-a)\right)\right|\right\}\right|$$

Kürzen wir letzteren Ausdruck ab durch

$$\left|\frac{|b-a|}{2^m}\sum_{i=1}^{2^n}\left\{\sum_{j=1}^{2^{m-n}}|f(x)-f(y)|\right\}\right|$$

Andererseits war alles so eingerichtet, daß:

$$|x-y|=\left|\left(a+\frac{(i-1)2^{m-n}+j}{2^m}(b-a)\right)-\left(a+\frac{i2^{m-n}}{2^m}(b-a)\right)\right|=\frac{|b-a|}{2^m}|2^{m-n}-j|\leqslant\frac{|b-a|}{2^m}2^{m-n}\leqslant\frac{|b-a|}{2^n}$$

Jetzt kommt endlich die gleichmäßige Stetigkeit von f zum Tragen:
Zu $\epsilon>0$ gibt es $\delta>0$, so daß für alle $x,y\in[a,b]$: $|x-y|<\delta\rightarrow|f(x)-f(y)|<\epsilon$.

Anschließend wählt man $n_0\in\mathbb{N}$ so groß, daß $\frac{|b-a|}{2^{n_0}}<\delta$.

Für $m>n\geqslant n_0$ haben wir dann also:

$$|S^m-S^n|\leqslant\left|\frac{|b-a|}{2^m}\sum_{i=1}^{2^n}\left\{\sum_{j=1}^{2^{m-n}}|f(x)-f(y)|\right\}\right| \quad .$$

Es gibt insgesamt 2^m Summanden, von denen jeder kleiner als ϵ ist. Da aber auch 2^m im Nenner steht, können wir weiter abschätzen durch $|b-a|\epsilon$.

Die (S^n) bilden also eine Cauchyfolge.
Ist *M* der Grenzwert dieser Cauchyfolge, so ist als nächstes zu zeigen, daß dieser Grenzwert die Definitionsbedingung des Riemann-Integrals $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ erfüllt.

Es ist vielleicht für das Verständnis hilfreich, die obigen Summen einmal konkret mit *n*=2, *m*=3 und für den Fall $a=0, b=1$ hinzuschreiben. Dann erkennt man, daß alles ganz trivial ist :-) .

Wird fortgesetzt.