Produktregel der Differentialrechnung

Vorbemerkungen über stetige bilineare Abbildungen

Seien E,F,G Banachräume, $\Phi: E\times F\to G$ eine bilineare Abbildung.
Dann sind äquivalent:

a) Φ ist stetig
b) Φ ist stetig in 0=(0,0)
c) Φ ist beschränkt auf $\{(x,y)\in E\times F \mid \|x\|\leqslant 1, \|y\|\leqslant 1\}$
d) Es gibt eine positive Konstante $M\in\mathbb{R}$ mit $\forall x\in E, y\in F: \|\Phi(x,y)\|\leqslant M\|x\|\|y\|$

Beweis: Man zeigt a) ⇒ b) ⇒ c) ⇒ d) ⇒ a) , wobei a) ⇒ b) trivial.

Zu zeigen also b) ⇒ c) . Wir setzen die Stetigkeit von Φ in (0,0) voraus.
Zu $\epsilon=1$ gibt es dann ein $\delta>0$, so daß $\forall (x,y)\in E\times F: \|(x,y)\|<\delta\to\|\Phi(x,y)\|<1$.
Als Norm auf $E\times F$ wählen wir $\|(x,y)\|=\max\{\|x\|,\|y\|\}$.
Damit ist $\|(x,y)\|\leqslant 1$ äquivalent zu $\|x\|\leqslant 1$ und $\|y\|\leqslant 1$.
Ist nun $\|(x,y)\|\leqslant 1$, so folgt $\|(\frac{\delta}{2}x,\frac{\delta}{2}y)\|<\delta$, daher $1>\|\Phi(\frac{\delta}{2}x,\frac{\delta}{2}y)\|=\frac{\delta^2}{4}\|\Phi(x,y)\|$, und schließlich $\frac{4}{\delta^2}>\|\Phi(x,y)\|$, d.h. wir haben die Aussage c).

Jetzt c) ⇒ d) . Wir gehen aus von c) , haben also eine Schranke $M\in\mathbb{R}$ für die gilt $\forall x\in E, y\in F: \|x\|\leqslant 1$ und $\|y\|\leqslant 1\to\|\Phi(x,y)\|\leqslant M$. Sind nun $x\in E, y\in F$ beliebig, so ist im Falle für $x=0$ oder $y=0$ die Folgerung d) trivial, während anderenfalls

$$\|\Phi(x,y)\|=\left\|\Phi\left(\|x\|\frac{x}{\|x\|},\|y\|\frac{y}{\|y\|}\right)\right\|=\|x\|\|y\|\left\|\Phi\left(\frac{x}{\|x\|},\frac{y}{\|y\|}\right)\right\|\leqslant\|x\|\|y\|M$$, was zu zeigen war.

Als nächstes kommt d) ⇒ a) .
Setzen wir also die Aussage d) voraus, d.h. es gebe eine Schranke $0<M\in\mathbb{R}$, so daß $\forall x\in E, y\in F: \|\Phi(x,y)\|\leqslant M\|x\|\|y\|$. Gibt man jetzt $\epsilon>0$ vor und wählt $\delta=\sqrt{\frac{\epsilon}{M}}$, so folgt für $(x,y)\in E\times F$, $\|(x,y)\|<\delta$: $\|\Phi(x,y)\|\leqslant M\|x\|\|y\|<M\delta^2=\epsilon$.

Ist eine der oben genannten äquivalenten Bedingungen erfüllt, so existiert $\|\Phi\|:=\sup_{\|y\|,\|x\|\leqslant 1}\|\Phi(x,y)\|<\infty$ und es gilt: $\forall x\in E, y\in F: \|\Phi(x,y)\|\leqslant\|\Phi\|\|x\|\|y\|$.

Das Supremum existiert, weil die Abbildung Φ auf der Menge $\{(x,y)\in E\times F \mid \|x\|\leqslant 1, \|y\|\leqslant 1\}$ beschränkt ist. Sind dann $x\in E, y\in F$ beliebig, beide von Null verschieden, so folgt

$$\|\Phi(x,y)\|=\left\|\Phi\left(\|x\|\frac{x}{\|x\|},\|y\|\frac{y}{\|y\|}\right)\right\|=\|x\|\|y\|\left\|\Phi\left(\frac{x}{\|x\|},\frac{y}{\|y\|}\right)\right\|\leqslant\|x\|\|y\|\|\Phi\|$$

Satz (Ableitung einer bilinearen Abbildung): Ist $\Phi : E \times F \to G$ bilinear und stetig, so ist Φ in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in E \times F$ differenzierbar, und es gilt
$D\Phi(x_0, y_0)(h, k) = \Phi(x_0, k) + \Phi(h, y_0)$.

Beweis: Zunächst mache man sich klar, daß durch $\varphi(h, k) := \Phi(x_0, k) + \Phi(h, y_0)$ eine stetige lineare Abbildung $E \times F \to G$ definiert wird. Ist nämlich $(h, k) \in E \times F$, so folgt die Stetigkeit mit
$\|\varphi(h, k)\| = \|\Phi(x_0, k) + \Phi(h, y_0)\| \leqslant \|\Phi(x_0, k)\| + \|\Phi(h, y_0)\| \leqslant \|\Phi\| \|x_0\| \|k\| + \|\Phi\| \|h\| \|y_0\| \leqslant$
$2\|\Phi\| \|(x_0, y_0)\| \|(h, k)\|$;
so eine Abschätzung ist äquivalent zur Stetigkeit von φ . Für die Linearität ist u.a. zu zeigen, daß
$\varphi((h_1, k_1) + (h_2, k_2)) = \varphi(h_1, k_1) + \varphi(h_2, k_2)$, was man einfach nachrechnet.

Für den Nachweis, daß Φ in (x_0, y_0) differenzierbar ist und $D\Phi(x_0, y_0) = \varphi$ ist zu zeigen:
$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall h \in E, k \in F : \|(h, k)\| < \delta \to \|\Phi(x_0 + h, y_0 + k) - \Phi(x_0, y_0) - \varphi(h, k)\| \leqslant \epsilon \|(h, k)\|$

Nun gilt mit der Bilinearität von Φ und der Definition von φ :
$\Phi(x_0 + h, y_0 + k) - \Phi(x_0, y_0) - \varphi(h, k) =$
$\Phi(x_0, k) + \Phi(x_0, y_0) + \Phi(h, y_0) + \Phi(h, k) - \Phi(x_0, y_0) - \Phi(x_0, k) - \Phi(h, y_0) = \Phi(h, k)$, also

$\|\Phi(x_0 + h, y_0 + k) - \Phi(x_0, y_0) - \varphi(h, k)\| = \|\Phi(h, k)\| \leqslant \|\Phi\| \|h\| \|k\|$

Gibt man jetzt $\epsilon > 0$ vor und setzt $\delta = \dfrac{\epsilon}{\|\Phi\|}$, so kann man unter der Voraussetzung
$\|(h, k)\| < \delta$ zu Ende abschätzen: $\ldots \leqslant \|\Phi\| \|(h, k)\| \|(h, k)\| < \epsilon \|(h, k)\|$

Satz (Produktregel): Seien H, E, F, G Banachräume, $\Phi : E \times F \to G$ bilinear.
Statt $\Phi(x, y)$ schreiben wir kurz xy . Sei nun $U \subset H$ offen $f : U \to E$, $g : U \to F$.
Wir setzen für $x \in U$ $(fg)(x) := f(x) g(x)$ und haben damit eine Abbildung $fg : U \to G$.

Sind f,g in $x_0 \in U$ differenzierbar, so auch fg und es gilt: $\big(D(fg)(x_0)\big)(h) = \Big(\big(Df(x_0)\big)(h)\Big) g(x_0) + f(x_0) \Big(\big(Dg(x_0)\big)(h)\Big)$

Hier nochmal dieselbe Aussage aufgedröselt, mit weniger Klammern:
$D(fg)(x_0)$ soll eine stetige lineare Abbildung $H \to G$ sein. Wenden wir sie auf ein Element $h \in H$ an, so erhalten wir ein Element von G , nämlich $\big(D(fg)(x_0)\big)(h)$ **(*)**

Wir setzen $\varphi = Df(x_0)$ und $\psi = Dg(x_0)$ und haben $\varphi : H \to E$, $\psi : H \to F$. Damit gilt für $h \in H$: $\varphi(h) \in E$ und $\psi(h) \in F$. Andererseits gilt auch $f(x_0) \in E$ und $g(x_0) \in F$.

Produkte treten nur auf zwischen Elementen von E und Elementen von F , und jedes Produkt liegt in G . Daher liegen die Produkte $f(x_0) \cdot \psi(h) \in G$ und $\varphi(h) \cdot g(x_0) \in G$ und damit die Summe
$f(x_0) \cdot \psi(h) + \varphi(h) \cdot g(x_0) \in G$ **(**)**

Die Aussage des Satzes ist nun, daß die in (*) und (**) gebildeten Elemente gleich sind.

Beweis der Produktregel

Es handelt sich um eine einfache Anwendung der Kettenregel:

Offenbar gilt $fg = \Phi \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$.
Wir wissen bereits, daß Φ in jedem Punkt differenzierbar ist. Da f,g in $x_0 \in E$ differenzierbar sind, ist auch die Abbildung $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : U \to E \times F$ differenzierbar, und wir wissen, daß $D\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}(x_0) = \begin{pmatrix} Df(x_0) \\ Dg(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$. Die Kettenregel besagt nun, daß auch $fg = \Phi \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ in x_0 differenzierbar ist, und daß $D(fg)(x_0) = D\Phi\begin{pmatrix} f(x_0) \\ g(x_0) \end{pmatrix} \circ D\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}(x_0) = D\Phi\begin{pmatrix} f(x_0) \\ g(x_0) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$.
Den Ausdruck auf der rechten Seite rechnet man jetzt durch Anwenden auf ein $h \in H$ weiter aus:

$$\left(D\Phi\begin{pmatrix} f(x_0) \\ g(x_0) \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \varphi(h) \\ \psi(h) \end{pmatrix} = \Phi\big(f(x_0), \psi(h)\big) + \Phi\big(\varphi(h), g(x_0)\big) = f(x_0)\psi(h) + \phi(h)g(x_0) \quad .$$

Die ist nun aber genau der in der Produktregel benannte Ausdruck.

Beispiele:
All dies erscheint reichlich abstrakt, aber wir können unter der Produktregel sehr viele Fälle subsummieren:

1. Beginnen wir mit $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, der üblichen Multiplikation in $\mathbb{R}$.
Haben wir dann einen Banachraum H , $U \subset H$ offen, sowie zwei Funktionen $f, g : U \to \mathbb{R}$, die in $x_0 \in U$ differenzierbar sind, so besagt die Produktregel, daß auch $fg : U \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar ist und für $h \in H$: $\big(D(fg)(x_0)\big)(h) = \big(\big(Df(x_0)\big)(h)\big)g(x_0) + f(x_0)\big(\big(Dg(x_0)\big)(h)\big)$
Nun ist die Multiplikation in $\mathbb{R}$ kommutativ; außerdem kann man lineare Abbildungen mit Skalaren multiplizieren und daher weiterschreiben: $\ldots = \big(g(x_0)\big(Df(x_0)\big) + f(x_0)\big(Dg(x_0)\big)\big)(h)$, so daß wir insgesamt haben:

$$D(fg)(x_0) = g(x_0)\big(Df(x_0)\big) + f(x_0)\big(Dg(x_0)\big) \quad (*)$$

Auf beiden Seiten dieser Gleichung stehen lineare Abbildungen $H \to \mathbb{R}$.

Als Unterfall wählen wir jetzt $H = \mathbb{R}$ und $U = I$ ein offenes Intervall.
Hat man im Punkt $x_0 \in I$ differenzierbare Abbildungen $f, g : I \to \mathbb{R}$, so erinnere man sich an $\big(Df(x_0)\big)(h) = f'(x_0)h$, wobei $f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, so daß (*) sich auch schreiben läßt als

$$(fg)'(x_0) = g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

was man wahrscheinlich aus der Schule kennt.

Weitere Beispiele folgen.