Kurvenlänge

Man möchte einer Kurve $c:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ nach Möglichkeit eine Länge zuordnen. Dazu wählt man eine Zerlegung $\mathfrak{Z}=(a_0,\ldots,a_n)$ von $[a,b]$ und definiert mit $L(\mathfrak{Z},c):=\sum_{i=1}^{n}\|c(a_i)-c(a_{i-1})\|$ die Länge eines approximierenden Polygonzugs.

Eine Kurve heißt **rektifizierbar**, wenn die Längen dieser Polygonzüge bei Verfeinerung konvergieren, wenn also eine Zahl $M\in\mathbb{R}$ existiert mit $\forall\epsilon>0\,\exists\delta>0:\ |\mathfrak{Z}|<\delta\to|L(\mathfrak{Z},c)-M|<\epsilon$.

Die Zahl M ist dann eindeutig bestimmt und definitionsgemäß gleich der Länge $L(c)$ der Kurve.
Eine rektifizierbare Kurve besitzt also eine endliche Länge.

Satz: Eine stetig differenzierbare Kurve ist rektifizierbar, und es gilt: $L(c)=\int_a^b\|c'(t)\|dt$.

Beweis
Ist $\mathfrak{Z}=(a_0,\ldots,a_n)$ eine beliebige Zerlegung, so ist

$$L(\mathfrak{Z},c)=\sum_{i=1}^{n}\|c(a_i)-c(a_{i-1})\|=\sum_{i=1}^{n}\|\int_{a_{i-1}}^{a_i}c'(t)\,\mathrm{d}t\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i}\|c'(t)\|\,\mathrm{d}t=\int_a^b\|c'(t)\|\,\mathrm{d}t$$

Wenn wir auch eine Abschätzung $\int_a^b\|c'(t)\|\,\mathrm{d}t\leqslant L(\mathfrak{Z},c)+\epsilon(b-a)$ für hinreichend feine Zerlegungen erreichen können, so sind wir fertig.

c' ist stetig auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ und daher gleichmäßig stetig.
Zu $\epsilon>0$ gibt es daher ein $\delta>0$, so daß für alle $x,y\in[a,b]$ gilt:
$|x-y|<\delta\to\|c'(x)-c'(y)\|<\epsilon$. Ist daher $|\mathfrak{Z}|<\delta$ und $t\in[a_{i-1},a_i]$, so ist
$\|c'(t)\|\leqslant\|c'(t)-c'(a_i)\|+\|c'(a_i)\|\leqslant\epsilon+\|c'(a_i)\|$. Daraus folgt

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i}\|c'(t)\|\,\mathrm{d}t\leqslant\|c'(a_i)\|(a_i-a_{i-1})+\epsilon(a_i-a_{i-1})=\|\int_{a_{i-1}}^{a_i}c'(a_i)\,\mathrm{d}t\|+\epsilon(a_i-a_{i-1})\leqslant$$
$$\|\int_{a_{i-1}}^{a_i}c'(t)-(c'(t)-c'(a_i))\,\mathrm{d}t\|+\epsilon(a_i-a_{i-1})\leqslant\|\int_{a_{i-1}}^{a_i}c'(t)\,\mathrm{d}t\|+\int_{a_{i-1}}^{a_i}\|c'(t)-c(a_i)\|\,\mathrm{d}t+\epsilon(a_i-a_{i-1})\leqslant$$
$$\|c(a_i)-c(a_{i-1})\|+2\epsilon(a_i-a_{i-1})$$

Summiert man jetzt mit $\sum_{i=1}^{n}$, so erhält man

$$\int_a^b\|c'(t)\|\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{i=1}^{n}\|c(a_i)-c(a_{i-1})\|+2\epsilon(b-a)=L(\mathfrak{Z},c)+2\epsilon(b-a)$$

Es gilt also: Die Länge eines Polygonzugs für hinreichend feine Zerlegungen unterscheidet sich beliebig wenig vom Integral $\int_a^b\|c'(t)\|\,\mathrm{d}t$.

Beispiel:

Länge eines Parabelbogens:

Sei $c:[-1,1]\to\mathbb{R}^2 \quad c(t):=\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$.

Dann ist $c'(t)=\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$ und daher $L(c)=\int_{-1}^{1} \|c'(t)\| \mathrm{d}t=\int_{-1}^{1} \sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}t$.

Um dieses Integral auszurechnen, machen wir zunächst die Substitution $s=2t$, $ds=2\,dt$ und erhalten $\int_{-1}^{1} \sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \sqrt{1+s^2}\,\mathrm{d}s$.

Mit $\cosh x:=\frac{1}{2}\left(\exp(x)+\exp(-x)\right)$, $\sinh x:=\frac{1}{2}\left(\exp(x)-\exp(-x)\right)$ haben wir $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$, $\cosh' x=\sinh x$, $\sinh' x=\cosh x$.

Wir suchen noch $x\in\mathbb{R}$ mit $\sinh x=2$.

Dazu machen wir den Ansatz $x=\log z$ und haben $\sinh x=\frac{1}{2}(z-\frac{1}{z})=2$, also $z-\frac{1}{z}=4$ und $z^2-4z-1=0$, woraus sich als einzige positive Lösung $2+\sqrt{5}$ ergibt.

Man setze also $a:=\log(2+\sqrt{5})$ und mache die Probe, daß tatsächlich $\sinh a=2$ und $\sinh(-a)=-2$.

Damit können wir substitutieren $s=\sinh x$, haben $ds=\cosh x\,dx$ und demnach

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \sqrt{1+s^2}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a} \cosh^2 x\,\mathrm{d}x \quad .$$

Setzen wir $u=\cosh x\,,\,v=\sinh x$, so geht es jetzt weiter mit partieller Integration:

$$\frac{1}{2}\int_{-a}^{a} \cosh^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(uv|_{-a}^{a}-\int_{-a}^{a} \sinh^2 x\,\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{2}\left(uv|_{-a}^{a}+2a-\int_{-a}^{a} \cosh^2 x\,\mathrm{d}x\right)$$

Es ergibt sich

$$\frac{1}{2}\int_{-a}^{a} \cosh^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left(uv|_{-a}^{a}+2a\right)=\sqrt{5}-\frac{1}{2}\log\left(-2+\sqrt{5}\right)=2.9578857 \quad .$$

Das könnte stimmen, denn die Länge des Parabelbogens ist ja sicher größer als 2 und kleiner als 4.