Ableitung einer Inversen Abbildung

Seien E,F Banachräume, $U \subset E$ offen, $V \subset F$ offen, $f: U \to V$, $g: V \to U$ seien invers zueinander, f sei in $x_0 \in U$ differenzierbar mit Ableitung $Df(x_0) \in \mathscr{L}(E,F)$.

Wenn die Ableitung eine Inverse in $\mathscr{L}(F,E)$ besitzt, so ist g in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, und es gilt: $Dg(y_0) = \left(Df(x_0)\right)^{-1}$.

Bevor wir zum Beweis schreiten, hier hier ein (wichtiges) **Anwendungsbeispiel**:
Ist $E = F = \mathbb{R}$, so bedeutet die Invertierbarkeit der Ableitung, daß $f'(x_0) \neq 0$, und die obige Formel wird zu $g'(y_0) = \left(f'(x_0)\right)^{-1}$, einer Gleichung zwischen reellen Zahlen.

Betrachten wir speziell die bijektive Abbildung $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ und ihre Inverse $\log: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. Der obige Satz besagt jetzt, daß die Logarithmusfunktion überall differenzierbar ist, und daß mit $y_0 = \exp(x_0)$ folgt: $\log'(y_0) = \left(\exp'(x_0)\right)^{-1} = \left(\exp(x_0)\right)^{-1} = \frac{1}{y_0}$. Wir haben also:

$$\boxed{\forall\, y_0 \in \mathbb{R}_+^*:\ \log'(y_0) = \frac{1}{y_0}}$$

Dies ist eine **ganz wichtige Formel**.

Beweis des Satzes:
Wir gehen von der Differenzierbarkeit von f in x_0 aus und setzen $\varphi := Df(x_0)$.
Zu $\epsilon > 0$ kann man also ein $\delta_1 > 0$ finden, so daß für alle $h \in E$ mit $\|h\| < \delta_1$ gilt: $x_0 + h \in U$ und $\|f(x_0+h) - f(x_0) - \varphi(h)\| \leqslant \epsilon \|h\|$.

Was g angeht, so setzen wir $\psi := \varphi^{-1}$ und müssen hier zu $\tilde{\epsilon} > 0$ ein $\delta_2 > 0$ finden, so daß für alle $\eta \in F$ mit $\|\eta\| < \delta_2$ gilt: $y_0 + \eta \in V$ und $\|g(y_0+\eta) - g(y_0) - \psi(\eta)\| \leqslant \tilde{\epsilon} \|\eta\|$.

Wie schon bei der Kettenregel erweist es sich als praktisch, den Ansatz $g(y_0+\eta) - g(y_0) = h$ zu machen. Das heißt natürlich auch $g(y_0+\eta) = x_0 + h$, und nach Anwendung der zu g inversen Abbildung f hat man $y_0 + \eta = f(g(y_0+\eta)) = f(x_0+h)$ bzw. $\eta = f(x_0+h) - f(x_0)$ Damit ist

$$\begin{aligned} &\|g(y_0+\eta) - g(y_0) - \psi(\eta)\| = \|x_0 + h - x_0 - \psi(\eta)\| = \|h - \psi(\eta)\| = \|\varphi^{-1}(\varphi(h) - \eta)\| \leqslant \\ &\|\psi\| \|\varphi(h) - \eta\| = \|\psi\| \|f(x_0+h) - f(x_0) - \varphi(h)\| \leqslant \epsilon \|\psi\| \|h\| \end{aligned} \quad (*).$$

Die letzte Abschätzung gilt, wenn $\|h\| < \delta_1$. Unter dieser Voraussetzung gilt auch
$\|\eta - \varphi(h)\| = \|f(x_0+h) - f(x_0) - \varphi(h)\| \leqslant \epsilon \|h\|$ (**)

Im Prinzip wären wir jetzt fertig, wenn wir $\|h\|$ durch $\|\eta\|$ abschätzen könnten.

Ausgehend von (**) rechnen wir weiter $\epsilon \|h\| \geqslant \|\eta - \varphi(h)\| \geqslant -\|\eta\| + \|\varphi(h)\| \geqslant -\|\eta\| + K\|h\|$, wobei $K > 0$ eine Konstante ist. Wir werden jedenfalls $\epsilon \leqslant K/2$ wählen, so daß $0 < K/2 \leqslant K - \epsilon$.

Falls die Abschätzung nach unten in der vorletzten Zeile legitim ist – wir werden später darauf zurückkommen, haben wir $\frac{K}{2}\|h\| \leqslant (K - \epsilon)\|h\| \leqslant \|\eta\|$, somit $\|h\| \leqslant \frac{2}{K}\|\eta\|$.
Mit diesem Ergebnis fahren wir in (*) fort und erhalten:

$$\|g(y_0+\eta)-g(y_0)-\psi(\eta)\| \leqslant \epsilon \|\psi\| \|h\| \leqslant \epsilon \frac{2\|\psi\|}{K} \|\eta\| \quad (***)$$

Jetzt werden die Ergebnisse eingesammelt und geordnet:

Zu $\tilde{\epsilon} > 0$ wählen wir $\epsilon = \min\left\{\frac{\tilde{\epsilon} K}{2\|\psi\|}, \frac{K}{2}\right\}$.
Zu ϵ wählen wir δ_1 aus der Differenzierbarkeitsbedingung für f .
Anschließend wählen wir $\delta_2 = \delta_1 \frac{K}{2}$. Ggf. verkleinern wir diesen Wert, damit die δ_2 -Kugel um y_0 ganz in V liegt.

Ist dann $\|\eta\| < \delta_2$, so ist $\|h\| \leqslant \frac{2}{K} \|\eta\| < \frac{2}{K} \delta_2 = \delta_1$.
Mit dieser Voraussetzung für $\|h\|$ gilt die Abschätzung (***) , und wir können dort fortfahren:

$$\|g(y_0+\eta)-g(y_0)-\psi(\eta)\| \leqslant \epsilon \|\psi\| \|h\| \leqslant \epsilon \frac{2\|\psi\|}{K} \|\eta\| \leqslant \tilde{\epsilon} \|\eta\| \quad .$$

Dies war zu beweisen.

Bleibt zum Schluß noch der Nachweis der Ungleichung $\|\varphi(h)\| \geqslant K \|h\|$.
Wir können sogar $K = \frac{1}{\|\psi\|}$ wählen, wobei ψ die Inverse von φ ist:

Sei also $h \in E$.
Weil φ bijektiv ist, gibt es ein $\theta \in F$ mit $h = \psi(\theta)$ und $\varphi(h) = \theta$. Dann gilt:
$\|h\| = \|\psi(\theta)\| \leqslant \|\psi\| \|\theta\| = \|\psi\| \|\varphi(h)\|$, also, wie gewünscht $\|\varphi(h)\| \geqslant \frac{1}{\|\psi\|} \|h\|$.