Gleichmäßige Konvergenz

Wir betrachten im Folgenden Abbildungen $f: M \to N$, wobei M eine Menge und N ein metrischer Raum ist. Insbesondere interessieren und Folgen (f_n) von solchen Abbildungen. Eine solche Folge bestimmt für jedes $x \in M$ die Folge der Werte $(f_n(x))$ in N. Wenn für jedes $x \in M$ diese Folge in N konvergiert und wir den jeweiligen Grenzwert $f(x)$ nennen, so wird auf diese Weise eine Abbildung $f: M \to N$ gegeben. Man spricht von *punktweiser Konvergenz* der Folge (f_n). Schreibt man dies noch einmal formal hin, so erhält man:

I) $\forall \epsilon > 0, x \in M \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geqslant n_0 : d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ Punktweise Konvergenz

Insbesondere hängt n_0 nicht nur von ϵ sondern auch von dem Punkt $x \in M$ ab, und wenn man mit x in M herumwandert, wird die Menge der zugehörigen n_0 i.a. unbeschränkt sein.
In vielen Anwendungsfällen ist es aber von Interesse, zu $\epsilon > 0$ ein n_0 angeben zu können, welches für alle $x \in M$ seinen Zweck erfüllt, d.h. man möchte haben

II) $\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall x \in M \; \forall n \geqslant n_0 : d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ Gleichmäßige Konvergenz

und spricht dann von *gleichmäßiger Konvergenz* der Folge (f_n).

Natürlich ist jede gleichmäßig konvergente Folge von Abbildungen auch punktweise konvergent, aber an dieser Stelle sollte jeder Leser ein Beispiel suchen oder überlegen, daß die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt.

Die gleichmäßige Konvergenz ist deshalb wichtig, weil eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Abbildungen gegen eine stetige Funktion konvergiert, während die Grenzabbildung einer nur punktweise konvergenten Folge stetiger Abbildungen durchaus unstetig sein kann.

Um die Menge der Abbildungen $M \to N$ in einfacher Weise zu einem metrischen Raum machen zu können, betrachten wir zunächst nur beschränkte Abbildungen: Eine Abbildung $f: M \to N$ heißt *beschränkt*, wenn es eine offene Kugel in N gibt, welche die Menge der Bilder $f(M)$ enthält. Wir definieren also den Raum $\mathcal{B}(M, N)$ als die Menge aller beschränkten Abbildungen $M \to N$.

Man weist leicht nach, daß durch $d(f, g) := \sup_{x \in M} d(f(x), g(x))$ [1] eine Metrik auf $\mathcal{B}(M, N)$ definiert wird. Man nennt diese Metrik auch die *Metrik der gleichmäßigen Konvergenz.* Von einer Folge (f_n), die bezüglich dieser Metrik konvergiert, sagt man, sie konvergiere *gleichmäßig.*

Gilt $\lim_{n \to \infty} f_n = f$ in $\mathcal{B}(M, N)$, so heißt dies:
$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geqslant n_0 : d(f_n, f) < \epsilon$
und man sieht sofort, daß dies dieselbe Aussage ist wie oben in II) getroffene.

1 Man beachte, daß wir hier und im folgenden, um eine Überfrachtung der Notation zu vermeiden, verschiedene Metriken mit ***d*** bezeichnen; an dieser Stelle einerseits die neu definierte Metrik auf $\mathfrak{B}(M, N)$, andererseits die vorgegebene Metrik auf N.

Satz Der metrische Raum $\mathcal{B}(M, N)$ ist vollständig, wenn N vollständig ist.

Man muß zeigen, daß jede Cauchyfolge in $\mathcal{B}(M, N)$ konvergiert.

Ist nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{B}(M, N)$, so bedeutet dies $\forall \epsilon>0 \exists n_0\in\mathbb{N} \forall n, m\in\mathbb{N}: d(f_n, f_m)=\sup_{x\in M} d\left(f_n(x), f_m(x)\right)<\epsilon$. Es gilt also insbesondere für jedes $x\in M$: $\forall \epsilon>0 \exists n_0\in\mathbb{N} \forall n, m\in\mathbb{N}: d\left(f_n(x), f_m(x)\right)<\epsilon$, d.h. für jedes $x\in M$ ist die Folge $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in N, die demnach einen Grenzwert in N besitzt, den wir $f(x)$ nennen. Es wird also durch $f(x):=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ eine Abbildung $f: M\to N$ definiert, von der wir zunächst nachweisen müssen, daß sie beschränkt, also Element von $\mathcal{B}(M, N)$ ist.

Zu $\epsilon>0$ wählen wir dazu $n_0\in\mathbb{N}$, so daß $\forall n, m\geqslant n_0: d(f_n, f_m)<\epsilon$.
Sind dann also $n, m\geqslant n_0$, so gilt $\forall x\in M: d(f_n(x), f_m(x))<1$.

Zu einem festen $x\in M$ und zu $\eta>0$ läßt sich jetzt ein $m_0\in\mathbb{N}$ finden, $m_0\geqslant n_0$, so daß $\forall m\geqslant m_0$: $d(f_m(x), f(x))<\eta$. Wählen wir jetzt $n\geqslant n_0$, so folgt $d(f_n(x), f(x))\leqslant d(f_n(x), f_{m_0}(x))+d(f_{m_0}(x), f(x))<1+\eta$. Da $\eta=\epsilon$ gewählt werden kann, folgt $d(f_n(x), f(x))<2\epsilon$. Diese Abschätzung hängt aber gar nicht mehr von x ab.

Für den Spezialfall $\epsilon=1$ und das zugehörige n_0 liege die Wertemenge $f_{n_0}(M)$ in der Kugel $U_R(y_0)\subset N$. Die letzte Abschätzung zeigt, daß die Wertemenge $f(M)$ in der Kugel $U_{R+2}(y_0)$ liegt, daß also f ebenfalls beschränkt ist.

Kehren wir zu beliebigem $\epsilon>0$ und dem zugehörigen n_0 zurück, so zeigt die letzte Abschätzung, daß $d(f_n, f)=\sup_{x\in M} d(f_n(x), f(x))\leqslant 2\epsilon<3\epsilon$, und dies bedeutet gerade, daß die Folge (f_n) im Raum $\mathcal{B}(M, N)$ den Grenzwert f besitzt.

Bemerkung:
Ist E ein normierter Vektorraum, so rührt die Metrik auf $\mathcal{B}(M, E)$ selbst von einer Norm, nämlich der sog. *Supremumsnorm* $\|f\|:=\sup_{x\in M}|f(x)|$ her.

Setzt man wie üblich $\mathbb{N}_n:=\{1,2,3,\ldots n\}$, so ist $\mathcal{B}(\mathbb{N}_n, \mathbb{R})$ als Banachraum isomorph zum $\mathbb{R}^n$ mit der Maximumsnorm, während $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})\simeq \ell_\infty$.

Insbesondere ist nämlich die Abbildung $\Phi: \mathcal{B}(\mathbb{N}_n, \mathbb{R})\to\mathbb{R}^n$, die durch $f\to\left(f(1), \ldots, f(n)\right)$ gegeben ist, ein Vektorraumisomorphismus, und es gilt $\|f\|=\|\Phi(f)\|$.

Gleichmäßige Konvergenz stetiger Abbildungen

Wir versehen jetzt auch die Menge M mit der Struktur eines metrischen Raums und betrachten den Raum $C_b(M, N)$ der beschränkten stetigen Abbildungen $M \to N$. Dabei handelt es sich offenbar um eine Teilmenge des metrischen Raums $\mathcal{B}(M, N)$, und mit der von diesem Raum ererbten Metrik wird auch $C_b(M, N)$ zu einem metrischen Raum. Wir gehen auch hier davon aus, daß N vollständig ist und haben dann den wichtigen:

Satz Der Raum $C_b(M, N)$ ist vollständig.

Mit anderen Worten: Eine gleichmäßig konvergente Folge beschränkter stetiger Abbildungen $M \to N$ besitzt eine stetige Grenzabbildung (die natürlich auch beschränkt ist).

Beweis:

Sei also (f_n) eine gleichmäßige Cauchyfolge beschränkter stetiger Abbildungen $M \to N$, d.h. eine Cauchyfolge bzgl. der durch $\mathcal{B}(M, N)$ gegebenen Metrik. Wir wissen aus dem Satz zuvor, daß es eine Grenzabbildung $f \in \mathcal{B}(M, N)$ gibt, daß also die Folge (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert. Es muß gezeigt werden, daß f stetig ist.

Die gleichmäßige Konvergenz bedeutet:
$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geqslant n_0 \, \forall x \in M : d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$
Man beachte, daß n_0 nicht von x abhängt.

Die Stetigkeit der (f_n) heißt:
$\forall n \in \mathbb{N}, x \in M \, \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall y \in M : d(x, y) < \delta \to d(f_n(x), f_n(y)) < \epsilon$
Man beachte, daß δ von n,x und ϵ abhängt.

Zum Nachweis der Stetigkeit von f schätzen wir ab:
$d(f(x), f(y)) \leqslant d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f(y)) \leqslant$
$d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(y)) + d(f_n(y), f(y))$

Geben wir $x \in M$ und $\epsilon > 0$ vor.
Die gleichmäßige Konvergenz beschert uns ein n_0 in Abhängigkeit von ϵ, wir setzen $n = n_0$ und beschaffen uns aus der Stetigkeit von f_n ein δ, welches von $n = n_0$, x und ϵ, also nur von x und ϵ abhängt. Setzen wir dann $d(x, y) < \delta$ voraus, so können wir obige Abschätzungskette fortsetzen

$\ldots < \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon$

Zusammenfassend: zu $x \in M$ und $\epsilon > 0$ haben wir ein $\delta > 0$ gefunden, so daß für alle $y \in M$
$d(x, y) < \delta \to d(f(x), f(y)) < 3\epsilon$.

Damit haben wir die Stetigkeit von f in einem beliebigen $x \in M$: f ist stetig auf M !

Anwendung auf Potenzreihen

Satz: Eine Potenzreihe definiert innerhalb ihres Konvergenzbereichs eine stetige Funktion.

Dabei betrachten wir hier Potenzreihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit komplexen Koeffizienten, in die wir auch komplexe Werte einsetzen. Dies schließt den Fall ein, daß die Koeffizienten reell sind und man nur reelle Werte einsetzt.

Wir wiederholen:

Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ konvergent für ein $z_0 \in \mathbb{C}, z_0 \neq 0$, so ist sie absolut konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$.

Der Beweis geht so:
Aus der Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ folgt, daß die Summanden eine Nullfolge bilden;
jedenfalls gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geqslant n_0 : |a_n z_0^n| \leqslant 1$. Es ist $\eta := \frac{|z|}{|z_0|} < 1$, und wir schätzen ab:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n z_0^n| \left(\frac{|z|}{|z_0|} \right)^n \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} \eta^n = \frac{\eta^{n_0+1}}{1-\eta} < \infty$$

, also absolute Konvergen der Reihe.

Mit $s(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ haben wir also eine komplexwertige Funktion, die innerhalb des offenen Kreises mit dem Radius $R := |z_0|$ um 0 definiert ist. Ziel ist es zu zeigen, daß diese Funktion innerhalb dieses Kreises stetig ist.

Man kann nicht davon ausgehen, daß die Funkition *s* im offenen Kreis $U_R(0)$ beschränkt ist. Als Gegenbeispiel könnte man die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, die für $z_0 = -1$ konvergiert, daher im Kreis $U_1(0)$ nach obiger Darstellung absolut konvergiert und, wie wir wissen, dort die Funktion $\frac{1}{1-z}$ darstellt. Diese Funktion ist im offenen Einheitskreis zwar stetig, aber nicht beschränkt!

Um die Beschränktheit zu erzwingen, beschränken wir den Definitionsbereich der Funktion auf abgeschlossene Kreise um 0 mit einem Radius kleiner als $|z_0|$. Solche Kreise sind kompakt, und eine stetige Funktion muß auf ihnen beschränkt sein. Damit kann unsere auf den Vorseiten entwickelte Theorie über stetige beschränkte Abbildungen zum Tragen kommen.

Wählen wir dazu eine Zahl $\eta,\ 0 < \eta < 1$, und betrachten die Menge $M := \{ z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leqslant \eta |z_0| \}$.
M ist ein abgeschlossener Kreis. Wir betrachten die durch $s_n(z) := \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ gegebene Funktionenfolge (s_n) im Raum $C_b(M, \mathbb{C})$ und zeigen, daß sie bezüglich der auf diesem Raum gegebenen Metrik eine Cauchyfolge bilden. Damit erhalten wir eine stetige beschränkte Grenzfunktion auf M, denn die s_n sind ja Polynome und damit stetig.

Zu diesem Zweck folgende Rechnung mit $n>m\geqslant n_0$, $z\in M$, später zu bestimmendem n_0 :

$$|s_n(z)-s_m(z)|=\left|\sum_{i=m+1}^{n} a_i z^i\right|\leqslant \sum_{i=m+1}^{n} |a_i z^i|=\sum_{i=m+1}^{n} |a_i z^i|\frac{|z|^i}{|z_0|^i}$$

An dieser Stelle läßt sich n_0 jedenfalls so groß wählen, daß die $|a_i z^i|\leqslant 1$ sind.
Wir können also weiter abschätzen:

$$\ldots\leqslant \sum_{i=m+1}^{n}\left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^i\leqslant \sum_{i=m+1}^{\infty}\eta^i=\frac{\eta^{m+1}}{1-\eta}\leqslant\frac{\eta^{n_0+1}}{1-\eta}$$

Zweifellos läßt bei vorgegebenem $\epsilon>0$ sich n_0 weiterhin so wählen, daß $\frac{\eta^{n_0+1}}{1-\eta}<\epsilon$.

Damit gilt: $\forall\epsilon>0\,\exists n_0\,\forall n,m\geqslant n_0\,\forall z\in M: |s_n(z)-s_m(z)|<\epsilon$, und dies ist die gewünschte gleichmäßige Konvergenz, somit stellt die Potenzreihe in *M* eine stetige Funktion dar.

Man erinnere sich, daß man ursprünglich nur wußte, daß die Potenzreihe in z_0 konvergiert. Wir setzten $R=|z_0|$ und zeigten als nächstes, daß die Reihe für jedes $z\in U_R(0)$ absolut konvergiert. Anschließend zeigten wir, daß sie in jedem abgeschlossenen Kreis, der ganz in $U_R(0)$ liegt, gleichmäßig konvergiert und damit eine stetige Funktion darstellt. Damit stellt sie aber in ganz $U_R(0)$ eine stetige Funktion dar, denn wir können den Rand des abgeschlossenen Kreises ja beliebig nah an den Rand des offenen Kreise heranschieben.

Dieses Argument nochmal ausführlicher, auch wenn es lästig ist:
Wir setzen $B_r(z):=\{w\in\mathbb{C}\,|\,|w-z|\leqslant r\}$; dies ist die abgeschlossene Kugel mit Radius *r* um *z* .
Die Potenzreihe konvergiert absolut im offenen Kreis $U_R(0)$ und gleichmäßig in $B_S(0)$, wenn *S*<*R* ; sie stellt also in $B_S(0)$ und damit in $U_S(0)$ eine stetige Funktion dar. Ist jetzt $z_1\in U_R(0)$, so setzen wir $S:=\frac{|z_0|+|z_1|}{2}$, wodurch sich gerade $z_1\in U_S(0)\subset B_S(0)\subset U_R(0)$ ergibt. Weil die Potenzreihe im abgeschlossenen Kreis $B_S(0)$ gleichmäßig konvergiert, stellt sie dort eine stetige Funktion dar, also ist diese auch stetig in $U_S(0)$ und damit in z_1 . Da aber z_1 in $U_R(0)$ beliebig gewählt war, erhält man eine stetige Funktion in ganz $U_R(0)$ und damit im gesamten Konvergenzbereich der Reihe.

Man könnte hier mit einem Abschnitt über Banachalgebren fortfahren. Der Beweis des obigen Satzes über die Stetigkeit von durch Potenzreihen dargestellten Funktionen überträgt sich dann wörtlich von komplexen Zahlen zu Banachalgebren; man weiß dann z.B., daß auch matrizenwertige Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzbereichs stetig sind.

In der Vorlesung haben wir diesen Satz für komplexe Potenzreihen behandelt. Es ist aber formal genauso leicht, ihn z.B. für matrixwertige Potenzreihen zu beweisen.