**Blatt 2 Aufg 4d)**

Sei $f: M \to N$ eine Abbildung. Man zeige, daß $f$ genau dann stetig ist, wenn der Graph von $f$, also die Teilmenge $\{(x, f(x)) | x \in M\}$ von $M \times N$ zshgd. ist.

Wenn wir ausgehend von der Stetigkeit von $f$ den Zusammenhang des Graphen von $f$ folgern möchten, so benötigen wir als zusätzliche Voraussetzung, daß $M$ zusammenhängend ist.

Anderenfalls hätte man das folgende triviale Gegenbeispiel:
$M$ sei eine zweipunktige Menge, $N$ eine einpunktige, jeweils mit der diskreten Topologie. Dann gibt es nur eine einzige Abbildung $f: M \to N$, und diese ist stetig. Die Produkttopologie auf der zweipunktigen Menge $M \times N$ ist ebenfalls diskret, der Graph ist ebenfalls eine zweipunktige Menge und damit in der diskreten Topologie nicht zusammenhängend.

Aber auch die umgekehrte Richtung ist ziemlich falsch: Keineswegs folgt aus dem Zusammenhang des Graphen von $f$ die Stetigkeit von $f$, wie unten genauer gezeigt wird. Die Aufgabe ist also ziemlich falsch gestellt, gibt aber dennoch Anlaß zu interessanten Überlegungen:

Sei also $M$ zusammenhängend.
Wir gehen aus von der Stetigkeit von $f$ und möchten den Zusammenhang von des Graphen von $f$ beweisen.

Dazu ist folgender Hilfssatz nützlich:
Sind $f: M \to L$, $f: M \to N$ stetige Abbildungen, so ist $f \times g: M \to L \times N$ ebenfalls stetig, wenn man auf $L \times N$ die Produkttopologie nimmt.

Beweis des Hilffsatzes:
Man muß zeigen, daß Urbilder offener Mengen offen sind.
Offene Mengen in $L \times N$ sind Vereinigungen von Produkten $V \times W$, wobei $V$ offen in $L$ und $W$ offen in $N$ ist. Daher muß man lediglich zeigen, daß Urbilder solcher offener Basismengen offen sind. Man sieht aber sofort, daß $(f \times g)^{-1}(V \times W) = f^{-1}(V) \cap g^{-1}(W)$ ist, und letztere Menge ist wegen der Stetigkeit von $f$ und $g$ offen.

Betrachtet man jetzt den Spezialfall $(\mathrm{id} \times f): M \to M \times N$, so ist auch diese Abbildung stetig, und es ist gerade $(\mathrm{id} \times f)(M) = \mathrm{Graph}(f)$. Da unter stetigen Abbildungen Bildmengen zusammenhängender Mengen zusammenhängend sind, ist der Graph von $f$ zusammenhängend.

Nun zur Rückrichtung: Kann man aus dem Zusammenhang des Graphen die Stetigkeit der Abbildung folgern?

Zunächst stellt sich heraus, daß man weitere Bedingungen stellen muß, wie das folgende Beispiel einer unstetigen Abbildung mit einem zusammenhängenden Graphen zeigt:
$f: S^1 \to \mathbb{R}$ ordne jedem Vektor des Einheitskreises im $\mathbb{R}^2$ den Winkel zu, den er mit der $x$-Achse bildet, also $f(1,0) = 0$, $f(0,1) = \pi/2$, $f(-1,0) = \pi$, etc. Offenbar gibt es eine Unstetigkeitsstelle von $f$ in (1,0) : wir beginnen die Winkelmessung entgegen dem Urzeigersinn mit 0 und enden nach einem Kreisumlauf bei $2\pi$. Den Produktraum $S^1 \times \mathbb{R}$ können wir uns leicht vorstellen als Zylinderfläche im $\mathbb{R}^3$, und der Graph von $f$ ist eine

zusammenhängende spiralige Linie, die beginnend am Punkt (1,0,0) and der Zylinderwand hochläuft und vor dem Punkt (1,0,2π) endet. Die Unstetigkeit macht sich darin bemerkbar, daß diese Spirallinie am Anfang geschlossen ist, am Ende aber nicht. Man könnte daher vermuten, daß der Graph einer stetigen Abbildung abgeschlossen sein sollte. Wenn der Bildbereich der Abbildung ein Hausdorffraum ist, ist dies tatsächlich der Fall und läßt sich beweisen:

Wäre $G$ :=Graph($f$) nämlich nicht abgeschlossen, so besäße $G$ einen Häufungspunkt $(x_0, y_0) \in M \times N$, der nicht zu $G$ gehört, d.h. $y_0 \neq f(x_0)$. In jeder offenen Umgebung von $(x_0, y_0)$ gäbe es demnach Punkte von $G$. Indem wir jetzt zusätzlich voraussetzen, daß $N$ hausdorffsch ist, erhalten wir disjunkte offene Umgebungen $V(f(x_0))$ und $W(y_0)$. Wegen der Stetigkeit von $f$ in $x_0$ gibt es eine offene Umgebung $U(x_0)$ mit $f(U(x_0)) \subset V(f(x_0))$. In der offenen Umgebung $U(x_0) \times W(y_0)$ des Häufungspunktes $(x_0, y_0)$ wählen wir jetzt einen Punkt von $G$, der dann die Form $(x, f(x))$ mit $x \in U(x_0)$ besitzt. Es folgt nun einerseits daß $f(x) \in W(y_0)$ und andererseits $f(x) \in V(f(x_0))$ : Widerspruch!

Die Abgeschlossenheit und der Zusammenhang des Graphen reichen aber keineswegs, um die Stetigkeit von $f$ zu beweisen. Wir können nämlich das obige Beispiel modifizieren, indem wir als Abbildungswert auf der $S^1$ nicht den Winkel φ von 0 bis 2π wählen, sondern z.B. den Ausdruck $\theta := \frac{2\pi\varphi}{2\pi - \varphi}$. Für $\varphi = 0$ kommt dabei 0 heraus, für $\varphi \to 2\pi$ haben wir $\theta \to \infty$. Der Graph dieser Abbildung dreht sich jetzt einmal um den Zylinder herum und läuft gleichzeitig unbeschränkt nach oben. Der Graph ist diesmal abgeschlossen und zusammenhängend. Wir haben das vorher offene obere Ende nach unendlich verschoben!

Dies läßt sich verhindern, indem wir fordern, daß der Wertebereich der Abbildung, also der Raum $N$ kompakt sei. Es läßt sich jetzt zeigen:

**Satz**: Seien $M$, $N$ topologische Räume, $N$ kompakt und hausdorffsch, $f: M \to N$ und der Graph von $f$ sei abgeschlossen. Dann ist $f$ stetig.

Beweis: auf Anfrage.

Bemerkung: Wenn man dann weiß, daß die Abbildung stetig ist, folgt wie oben aus dem Zusammenhang von $M$ der Zusammenhang des Graphen. Dies bedeutet im Angesicht der obigen Gegenbeispiele, daß es beim Nachweis der Stetigkeit von $f$ eigentlich überhaupt nicht auf den Zusammenhang des Graphen ankommt, sondern auf seine Abgeschlossenheit und die Kompaktheit des Bildraums.