Beispiel einer beschränkten und abgeschlossenen, aber nicht kompakten Menge

Im Raum ℓ_2 der quadratsummierbaren Folgen reeller Zahlen findet man beschränkte und abgeschlossene Mengen die nicht kompakt sind:

Man betrachte z.B. die Menge der Einheitsvektoren in ℓ_2, also $K := \{ e^i \mid i \in \mathbb{N} \}$.
Zur Erinnerung: $e^i_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Weil alle e^i die Norm 1 besitzen, ist die Menge *K* beschränkt.
Wir zeigen jetzt, daß sie auch abgeschlossen ist:

Zunächst sieht man sofort, daß $\|e^i - e^j\| = \sqrt{2}$ für $i \neq j$.

Betrachten wir anschließend $\ell_2 - K$; wir müssen nachweisen, daß diese Menge offen ist.
Zu jedem $x \in \ell_2 - K$ ist daher eine ε-Umgebung anzugeben, die ganz in $\ell_2 - K$ liegt.

Dabei unterscheiden wir folgende Fälle:

1. $\|x - e^i\| \geqslant \frac{1}{2}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Ist dann $y \in U_{1/4}(x)$, so ist $\frac{1}{2} \leqslant \|x - e^i\| \leqslant \|x - y + y - e^i\| \leqslant \|x - y\| + \|y - e^i\| < \frac{1}{4} + \|y - e^i\|$, also $\|y - e^i\| \geqslant 1/2 - 1/4 > 0$, daher für alle *i*: $y \neq e^i$ und somit $y \notin K$; also folgt $U_{1/4}(x) \subset \ell_2 - K$.

2. $0 < \delta := \|x - e^i\| < \frac{1}{2}$ für ein gewisses $i \in \mathbb{N}$.

Ist dann $j \neq i$ und $y \in U_\delta(x)$ so folgt
$\sqrt{2} = \|e^i - e^j\| \leqslant \|e^i - x + x - y + y - e^j\| \leqslant \|e^i - x\| + \|x - y\| + \|y - e^j\| \leqslant \delta + \|y - e^j\| + \delta < 1 + \|y - e^j\|$, also $\|y - e^j\| > \sqrt{2} - 1 > 0$, also $y \neq e^j$ für alle $j \neq i$.
Auch ist $\delta = \|x - e^i\| = \|x - y + y - e^i\| \leqslant \|x - y\| + \|y - e^i\| < \delta + \|y - e^i\|$, also gilt $0 < \|y - e^i\|$ und damit auch $y \neq e^i$; somit haben wir auch hier $y \notin K$ und damit liegt die ganze Kugel $U_\delta(x)$ in $\ell_2 - K$.

In jedem Fall ist daher $\ell_2 - K$ offen und damit *K* abgeschlossen.
Man beachte, daß gar keine besonderen Eigenschaften von ℓ_2 benutzt wurden, sondern nur die Dreiecksungleichung und die Tatsache, daß es unendlich viele Punkte in einer beschränkten Menge gab, die alle voneinander den Abstand $\sqrt{2}$ hatten.

Legen wir nun um jeden Punkt von *K* eine offene Kugel mit Radius $\sqrt{2}$, so liegt in jeder Kugel nur ein einziger Punkt von *K*. Einerseits haben wir damit eine Überdeckung von *K* durch abzählbar viele offene Kugeln, andererseits können wir keine davon weglassen, ohne die Überdeckungseigenschaft zu verlieren. *K* kann also nicht kompakt sein.

Man betrachte zusätzlich das folgende triviale Beispiel: Man nehme eine abzählbare unendliche Menge M, z.B. $\mathbb{N}$ und statte sie mit der diskreten Metrik aus. In der zugehörigen Topologie sind die einpunktigen und damit alle Mengen offen und daher auch abgeschlossen. Die Menge *M* ist auch beschränkt, da ja die offene Kugel mit Radius 2 um irgendeinen Punkt die Gesamtmenge enthält. Die offenen Kugeln mit Radius 1 um jeden Punkt enthalten nur diesen einen Punkt. Sie bilden daher eine offene Überdeckung, von der man keine überdeckende Menge weglassen kann. Daher ist *M* nicht kompakt.

Trotzdem ist das erste Beispiel interessant.
Es wird sich herausstellen, daß im $\mathbb{R}^n$ jede beschränkte abgeschlossene Menge kompakt ist.
Unser Hilbertraum, in dem dies nicht gilt, ist mit dem $\mathbb{R}^n$ sehr nah verwandt. Die Teilmenge *K* ist dagegen „topologisch“ praktisch dasselbe wie der diskrete Raum *M* im zweiten Beispiel.