Ableitung und Integral einer Grenzfunktion

Man möchte, daß die Formel $\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} (f_n')$ „Sinn macht".

Dazu betrachten wir stetig differenzierbare Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$. Eine solche Funktion ist definitionsgemäß fortsetzbar zu einer stetig differenzierbaren Funktion auf einem offenen Intervall, welches [a,b] umfaßt.

Setzt man $C^1[a,b] := \{ f:[a,b]\to\mathbb{R} \mid f \text{ stetig differenzierbar} \}$, so hat man offenbar wieder einen $\mathbb{R}$-Vektorraum vor sich, mit der üblichen Addition von Funktionen und Multiplikation mit reellen Skalaren. Dieser Vektorraum ist offenbar ein Unterraum des Vektorraums der auf $[a,b]$ stetigen Funktionen $C[a,b] := C^0[a,b] := \{ f:[a,b]\to\mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$. Letzterer ist ein Banachraum mit der Norm der gleichmäßigen Konvergenz $\|f\| := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Man weiß ja, daß stetige Funktionen auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall, also auf einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}$, beschränkt sind, so daß dieses Supremum in $\mathbb{R}$ existiert, und daß eine gleichmäßige Cauchyfolge stetiger Funktionen eine stetige Grenzfunktion besitzt.

Wenn wir im folgenden $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ schreiben, ist also immer gemeint, daß (f_n) eine Folge in $C[a,b]$ ist, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f\in C[a,b]$ konvergiert, d.h.

$\forall \epsilon>0\, \exists n_0\in\mathbb{N}\, \forall n\geqslant n_0:\ \|f-f_n\|<\epsilon$, oder – was dasselbe bedeutet:
$\forall \epsilon>0\, \exists n_0\in\mathbb{N}\, \forall n\geqslant n_0\, \forall x\in[a,b]:\ |f(x)-f_n(x)|<\epsilon$.

Nun kann man leicht (Übungsaufgabe!) eine gleichmäßig konvergente Folge stetig differenzierbarer Funktionen auf $[a,b]$ konstruieren, deren (notwendigerweise stetige) Grenzfunktion zumindest in einem Punkt nicht differenzierbar ist. Schwieriger, aber möglich, ist es, eine gleichmäßig konvergente Folge stetig differenzierbarer (ja sogar beliebig oft differenzierbarer) Funktionen zu konstruieren, deren Grenzfunktion in keinem einzigen Punkt von $[a, b]$ differenzierbar ist.

Die Formel $\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} (f_n')$ setzt jedenfalls voraus, daß die Grenzfunktion auf der rechten Seite der Gleichung existiert, d.h. die stetigen Funktionen (f_n') müssen selbst gleichmäßig konvergieren. Diese Bedingung reicht aber nicht aus, um die Existenz der Grenzfunktion $\lim_{n\to\infty} f_n$ auf der rechten Seite der Gleichung zu garantieren, wie das folgende Beispiel zeigt:
Sei $f_n(x) := n$. Dann verschwinden alle f_n', konvergieren also auch gleichmäßig gegen die Nullfunktion. Aber die Funktionenfolge (f_n) ist offenbar in keiner Weise konvergent.

Satz:

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C^1[a,b]$ und $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Ableitungen.
Diese Ableitungsfolge sei gleichmäßig konvergent, und es sei: $\lim_{n\to\infty} f_n' =: g$; außerdem konvergiere die Folge $f_n(x_0)$ für ein $x_0\in[a,b]$.

Dann ist auch die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent.

Setzt man $f := \lim_{n\to\infty} f_n$, so ist diese Grenzfunktion stetig differenzierbar, und es gilt $f' = g$.

Man kann daher schreiben: $\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty}(f_n')$!

Beweis:
Es sei $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) =: a$.
Zu $\epsilon > 0$ wähle man $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für $n \geqslant n_0$: $|a - f_n(x_0)| \leqslant \epsilon$ und $\|g' - f_n'\| \leqslant \epsilon$, also $\forall x \in [a,b]: |g'(x) - f_n'(x)| < \epsilon$

Wir setzen $f(x) := \int_{x_0}^{x} g(x)\,\mathrm{d}x + a$.
Damit ist f stetig differenzierbar auf $[a, b]$, $f' = g$ und für $x \in [a,b]$ gilt:

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant |(f(x) - a) + (a - f_n(x_0)) - (f_n(x) - f_n(x_0))| \leqslant |\int_{x_0}^{x} (g(t) - f_n'(t))\,\mathrm{d}t| + |a - f_n(x_0)|$$
$$\leqslant |x - x_0| \|g - f_n'\| + \epsilon \leqslant \epsilon((b-a)+1)$$

Dies bedeutet, daß die Folge (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, d.h. $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Daß $f' = g$, steht schon oben.

Bemerkung:
Man kann offenbar auf $C^1[a,b]$ eine Norm definieren, indem man $\widetilde{\|f\|}_1 := \max\{|f(x_0)|, \|f'\|\}$ setzt. Aus obigem Satz leitet man leicht ab, daß der Raum $C^1[a,b]$ damit sogar vollständig wird und daß der etwas natürlichere Ausdruck $\|f\|_1 := \max\{\|f\|, \|f'\|\}$ eine äquivalente Norm liefert.

Ganz ähnlich hat man die Integralversion des vorigen Satzes:

Satz
Ist (f_n) eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen auf $[a,b]$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, so folgt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Mit anderen Worten $\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Beweis:
Zu $\epsilon > 0$ findet man $n_0 \in \mathbb{N}$ so daß $\forall n \geqslant n_0$: $\|f - f_n\| \leqslant \epsilon$, also $\forall n \geqslant n_0\, \forall x \in [a,b]$: $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \epsilon$. Dann ist

$$|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x| = |\int_a^b (f - f_n)(x)\,\mathrm{d}x| \leqslant \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\epsilon$$, q.e.d.

Eine interessante formale Eigenschaft des Integrals ist auch der folgende einfache Satz.

Satz:

Die durch $f \to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ gegebene Banachraum-Abbildung $C[a,b] \to \mathbb{R}$ ist linear und stetig!

Beweis: die Linearität ist trivial.

Die Stetigkeit folgt sofort aus der Ungleichung $|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x| \leqslant (b-a)\|f\|$.

Anwendung auf reelle Potenzreihen

Wir hatten schöne Ergebnisse über komplexe Potenzreihen erzielt, daß z.B. die durch $\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ definierte Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig ist und der Funktionalgleichung genügt und nie den Wert Null annimmt. Auch wurden die rellen Funktionen Sinus und Cosinus mit Hilfe dieser komplexen Funktion definiert! Wir werden später auch solche komplexen Funktionen mit Mitteln der Differentialrechnung analysieren, beschränken uns aber hier und jetzt auf durch reelle Potenzreihen dargestellte Funktionen, wozu dann aber auch die durch $\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ definierte reelle Exponentialfunktion, sowie $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ und $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ gehören..

Gehen wir also aus von einer reellen Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, also $a_n, x, x_0 \in \mathbb{R}$.
Wir wissen, daß es ein $R \in [0,\infty]$ gibt, den sogenannten Konvergenzradius[1], so daß im Konvergenzkreis um x_0 , also in $U_R(x_0) =]x_0 - R, x_0 + R[$ [2] f eine stetige Funktion darstellt, wobei die Partialsummen $s_n(x)$, die ja als Polynome stetig auf ganz $\mathbb{R}$ sind, in den abgeschlossenen Intervallen $[x_0 - r, x_0 + r]$, $r < R$ gleichmäßig gegen f konvergieren. Daher ist f stetig in allen diesen abgeschlossenen Intervallen und damit letztlich im gesamten offenen Konvergenzkreis[3].

Bisher haben wir die Differenzierbarkeit von f nicht näher untersucht.
Es stellt sich heraus:

Satz: f ist im gesamten offenen Konvergenzkreis differenzierbar und dort gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-x_0)^n$$

Das ist natürlich ein vernünftiges Ergebnis: man differenziert einfach alle Summanden. Aber darf man das?

---

1 $R := \sup\left\{ r \geqslant 0 \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty \right\}$

2 Wenn die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, setzt man $R = \infty$ und der „Konvergenzkreis“ ist ganz $\mathbb{R}$.
Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (n!) x^n$ konvergiert für kein $x \neq 0$ und besitzt daher den Konvergenzradius 0.

3 Auf dem Rand des Konvergenzkreises gibt es immer mindestens einen Punkt, in dem die Potenzreihe nicht konvergiert. Dies ist nicht ganz leicht zu beweisen. Meist interessiert man sich nicht besonders für den Rand.

Beweis:

a) Zunächst soll festgestellt werden, daß die abgeleitete Reihe denselben Konvergenzradius besitzt wie die Ausgangsreihe und in abgeschlossenen Teilintervallen des Konvergenzintervalls gleichmäßig konvergiert und somit dort eine stetige Funktion darstellt. Wir setzen $y=x-x_0$ und gehen aus von einem $0\neq y_0\in\mathbb{R}$, für welches die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ konvergiert. Wenn wir zeigen können, daß die abgeleitete Reihe für jedes $y\in\mathbb{R}$ mit $|y|<|y_0|$ gleichmäßig konvergiert, ist das Ziel a) erreicht.

Wir gehen vor wie beim Nachweis der Konvergenz der Originalreihe für solche *y*:
Aus der Konvergenz der Originalreihe für y_0 ergibt sich, daß die Summanden der Reihe eine Nullfolge bilden müssen. Wir finden also ein $n_0\in\mathbb{N}$, so daß für $n\geqslant n_0$ gilt: $|a_n y_0^n|\leqslant 1$. Ist jetzt $y\in\mathbb{R}, |y|\leqslant|y_0|-\epsilon$, so gibt es ein $\alpha\in\mathbb{R}, 0<\alpha<1$, so daß $|\frac{y}{y_0}|=\frac{|y|}{|y_0|}\leqslant\alpha$. Damit hat man $|n a_n y^{n-1}|=|n a_n\left(\frac{y}{y_0}\right)^{n-1} y_0^n \frac{1}{y_0}|\leqslant\frac{n}{|y_0|}\left(\frac{|y|}{|y_0|}\right)^{n-1}|a_n y_0^n|\leqslant\frac{n}{|y_0|}\alpha^{n-1}=\frac{1}{\alpha|y_0|}n\alpha^n$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^n$ ist aber absolut konvergent, wie man mit dem Quotientenkriterium leicht nachweist. Wir haben also eine gleichmäßige Majorante für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n y^{n-1}$ im Intervall $[-|y_0|+\epsilon, |y_0|-\epsilon]$ gefunden, also konvergieren die stetigen Partialsummen gleichmäßig und die Grenzfunktion $g(y)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}y^n$ ist stetig in diesem Intervall. Indem wir ϵ verkleinern, haben wir die Stetigkeit von *g* im gesamten offenen Intervall $]-|y_0|, |y_0|[$ und damit in $]-R, R[$. Die entsprechende Aussage gilt jetzt natürlich auch für $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Damit ist a) erreicht.

Zusammenfassend:
In abgeschlossenen Teilintervallen des Konvergenzintervalls konvergieren die Partialsummen s_n der Ausgangsreihe gleichmäßig. In diesen Teilintervallen konvergieren aber auch die Ableitungen s_n' der Partialsummen gleichmäßig. Also gilt in diesen Teilintervallen $\lim_{n\to\infty} s_n(x)$ ist differenzierbar und $\left(\lim_{n\to\infty} s_n\right)'=\lim_{n\to\infty} s_n'$. Da man die abgeschlossenen Teilintervalle beliebig nah an die Grenzen des Konvergenzintervalls heranführen kann, ergibt sich:

Eine Potenzreihe stellt innerhalb ihres Konvergenzintervalls eine differenzierbare Funktion dar. Die Ableitung ist eine Potenzreihe mit demselben Konvergenzradius, und sie ergibt sich durch gliedweises Differenzieren der Summanden der Ausgangsreihe.