Analysis II SS07, Aufgabenblatt 10 **M. Hortmann**									
Name(n)								***Gruppennummer***	
Punkte									
1a	b	c	d	e	2a	b	3	Summe	% bearbeitet

Wir haben ursprünglich differenzierbare Funktionen und Abbildungen nur auf offenen Mengen erklärt. Sind nun E, F Banachräume, $L \subset E$ eine Teilmenge und $f: L \to F$ eine Abbildung, so bezeichnen wir *f* als differenzierbar bzw. stetig differenzierbar auf *L*, wenn *f* zu einer differenzierbaren bzw. stetig differenzierbaren Abbildung auf einer offenen Obermenge $U \supset L$ fortgesetzt werden kann.

1. Durch $c(t) = \begin{cases} (t,0) & \text{für} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ (1,t-1) & \text{für} \quad 1 \leqslant t \leqslant 2 \end{cases}$ wird eine stetige Kurve $c:[0,2] \to \mathbb{R}^2$ definiert.

a) Man finde eine stetig differenzierbare Abbildung $\tilde{c}:[0,2] \to \mathbb{R}^2$, die dieselbe Bildmenge wie *c* besitzt, für die also gilt: $\{\tilde{c}(t) | 0 \leqslant t \leqslant 2\} = \{c(t) | 0 \leqslant t \leqslant 2\}$.

Da die Bildmenge in 1a) einen Knick besitzt, wird man die durch $\tilde{c}$ gegebene Kurve nicht gern „stetig differenzierbar" nennen. Eine Kurve $c:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ nennt man daher nur dann stetig differenzierbar, wenn einerseits die Abbildung *c* stetig differenzierbar ist und außerdem der durch die Parametrisierung *c* gegebene Tangentialvektor an die Kurve nie verschwindet, d.h. wenn $\forall t \in [a,b]: c'(t) \neq 0$. Stellt man sich den Parameter *t* als Zeit vor, bedeutet dies, daß man beim Durchlaufen der Kurve nie stehen bleibt oder gar umkehrt, d.h. die Durchlaufgeschwindigkeit wird nie Null.

Zwei stetig differenzierbare Kurven $c:[a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{c}:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ nennt man äquivalent, wenn es eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi:[\alpha,\beta] \to [a,b]$ gibt mit $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ und $\tilde{c} := c \circ \varphi$. Äquivalente Kurven haben offenbar dieselben Bildmengen im $\mathbb{R}^n$.

b) Man zeige, daß mit diesem Begriff eine Äquivalenzrelation unter den stetig differenzierbaren Kurven definiert wird.

c) Man zeige, daß zwei äquivalente stetig differenzbare Kurven dasselbe Längenintegral, also dieselbe Länge besitzen.

d) Durch $c:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ sei eine stetig differenzierbare Kurve gegeben. Dann ist natürlich für jedes $x \in]a,b]$ durch $t \to c(t)$ eine stetig differenzierbare Kurve $c_x := [a,x] \to \mathbb{R}^n$ gegeben. Sei *L* die Länge von *c* , L_x die Länge von c_x und $L_a := 0$. Man zeige, daß die

Abbildung $\varphi:[a,b]\to[0,L]$, $x\to L_x$ stetig differenzierbar ist, setze $\psi:=\varphi^{-1}$, $\tilde{c}:=c\circ\psi$ und zeige für $t\in[0,L]$, daß $\|\tilde{c}\,'(t)\|=1$.
(Man nennt $\tilde{c}$ die Parametrisierung der Kurve durch die Bogenlänge. Man kann sich dabei vorstellen, daß die durch die Bogenlänge parametrisierte Kurve mit konstanter Geschwindigkeit 1 durchlaufen wird.)

e) Man betrachte die durch $c:[2,5]\to\mathbb{R}^2$, $c(t)=(t^2,t^3)$ gegebene stetig differenzierbare Kurve und berechne ihre Länge.

2. Sei $C[a,b]$ der Vektorraum der auf dem Intervall [a, b] definierten stetigen Funktionen.

a) Man zeige, daß durch $<f,g>:=\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ auf diesem Raum ein Skalarprodukt erklärt wird.

b) Wegen a) ist durch $\|f\|:=\sqrt{<f,f>}$ auf $C[a,b]$ eine Norm erklärt. Wieso ist $C[a,b]$ bezüglich dieser Norm kein Banachraum?

3. Man berechne das Integral $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos x}\,\mathrm{d}x$ mit Hilfe der Substitution $y=\tan\frac{x}{2}$!