Analysis II SS07, Aufgabenblatt 9 **M. Hortmann**											
Name(n)										***Gruppennummer***	
Punkte											
1a	b	c	d	2a	b	3	4a	b	c	Summe	% bearbeitet
										120%	

Die Menge $\overline{\mathbb{R}}$ besteht definitionsgemäß aus den reellen Zahlen und zwei zusätzlichen Elementen $\infty, -\infty$. Indem man die Ordnung auf $\mathbb{R}$ durch $\forall a \in \mathbb{R} : -\infty \leqslant a \leqslant \infty$ und $-\infty \leqslant \infty$ fortsetzt, wird auch $\overline{\mathbb{R}}$ zu einer total geordneten Menge. Die bijektive Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow]-1,1[\quad x \rightarrow \frac{x}{1+|x|}$ läßt sich zu einer bijektiven Abbildung $\overline{\mathbb{R}} \rightarrow [-1,1]$ fortsetzen, indem man $f(-\infty)=-1$ und $f(\infty)=1$ setzt. Dann wird natürlich durch $\tilde{d}(x,y)=|f(x)-f(y)|$ eine Metrik auf $\overline{\mathbb{R}}$ definiert. Mit dieser Metrik erhalten wir eine Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}$.

1. Man zeige:

a) Ist $U \subset \mathbb{R}$ offen bezüglich der „alten" Topologie auf $\mathbb{R}$, so ist *U* auch offen bezüglich der eben durch $\tilde{d}$ definierten Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}$. (D.h. die durch die durch $\tilde{d}$ definierte Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}$ definiert auf der Teilmenge $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Relativtopologie, die mit der gewöhnlichen Topologie auf $\mathbb{R}$ übereinstimmt.)

b) Ist $a \in \mathbb{R}$, so ist $]a,\infty] := \{x \in \overline{\mathbb{R}} | a < x \leqslant \infty\}$ eine offene Kugel um ∞ bezüglich $\tilde{d}$.

c) Sind *M,N* metrische Räume, $a \in M$ und $b \in N$, $f: M-\{a\} \rightarrow N$ eine Abbildung, so bedeutet die Schreibweise $\lim_{x \rightarrow a} f(x)=b$ definitionsgemäß gerade

$$\forall \epsilon>0 \exists \delta>0 \forall x \in M : 0<d(x,a)<\delta \rightarrow d(f(x),b)<\epsilon \ .$$

Da sich eine Abbildung $f:[a,\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ als Abbildung $f:[a,\infty]-\{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}$ auffassen läßt, ist jetzt für $b \in \mathbb{R}$ die Schreibweise $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=b$ erklärt.

Man zeige, daß $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=b$ äquivalent ist zur Aussage

$$\forall \epsilon>0 \exists M \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : x>M \rightarrow |f(x)-b|<\epsilon \ .$$

d) Für eine Abbildung $f:[a,\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, die ja auch als Abbildung $f:[a,\infty[\rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ aufgefaßt werden kann, ist jetzt ebenfalls die Schreibweise $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=\infty$ erklärt. Man zeige, daß

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=\infty$ äquivalent ist zur Aussage: $\forall M \in \mathbb{R} \exists K \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : x>K \rightarrow f(x)>M$ -

(Es wird verzichtet auf eine zu $\lim_{x \rightarrow a} f(x)=\infty$ äquivalente Aussage.)

2. Sei $f,g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x)=x, \ g(x)=\exp(x)$. Man zeige

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=\infty$, b) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)=\infty$.

3. Man beweise die folgende Version der Regel von l'Hôpital: (Sonderaufgabe 20% extra)
Seien $a \in \mathbb{R}$, $f, g : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die im Innern des Intervalls differenzierbar sind. Es gelte $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$.

Wenn $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann existiert auch $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

4. Man wende die Regel von L'Hôpital an, ggf. in der in Aufg. 3 gegebenen Form, um die Existenz der folgenden Grenzwerte zu zeigen und ihren Wert zu berechnen. Bei der Anwendung sind natürlich die Voraussetzungen zu prüfen.

a) $\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x^2 - 1}$, b) $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan 5x}{\arctan 7x}$, c) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x}{\exp x}$