# Analysis II SS07, Aufgabenblatt 7
**M. Hortmann**

| Name(n) | Gruppennummer |
|---|---|
| | |
| | |
| | |

**Punkte**

| 1a | b | c | d | 2a | b | 3a | b | Summe | % bearbeitet |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

Man setzt $\mathbb{R}_+^* := \{x \in \mathbb{R} \mid > 0\}$ .

Die Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ ist bijektiv, stetig und offen[1] .

exp ist also ein Homöomorphismus (aber wegen der Funktionalgleichung auch ein Gruppen-isomorphismus der Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ , $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ ). Die Umkehrabbildung $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ heißt „natürlicher Logarithmus“, manchmal auch nur „Logarithmus“ und wird im Folgenden mit „log“ bezeichnet. In Umkehrung der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion hat man sofort die Funktionalgleichung der Logarithmusfunktion: $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^* : \log xy = \log x + \log y$ . Aus dem Satz über die Umkehrabbildung folgt die Differenzierbarkeit der Logarithmusfunktion: $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^* :\ \log'(x) = \frac{1}{x}$ ; dies wird in der Vorlesung gezeigt und soll im Folgenden benutzt werden.

**Aufgabe 1**
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}_+^*$ setze man $\varphi_\alpha(x) := \exp(\alpha \log x)$ und erhält so eine differenzierbare Funktion $\varphi_\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ .

a) Ist $n \in \mathbb{Z}$ , so gilt für jedes $x \in \mathbb{R}_+^*$ : $x^n = \varphi_n(x)$
b) Gilt für $n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ daß $x^n = y$ , so ist $x = \varphi_{1/n}(y)$

Daher ist es gerechtfertigt, $x^\alpha := \varphi_\alpha(x)$ zu schreiben.

c) Man zeige: $\varphi_\alpha$ ist differenzierbar, und es gilt: $\varphi_\alpha'(x) = \alpha\, x^{\alpha - 1}$

d) Für $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zeige man die Formeln $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$ und $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

1 offen: Blatt4, Aufg. 3

**Aufgabe 2**

In der Vorlesung wird gezeigt: Sind $f, g: I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar, für alle $x \in I$ sei $g(x) \neq 0$. Dann ist $\frac{f}{g}$ in $x_0$ differenzierbar, und es gilt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \quad \text{(Quotientenregel)}$$

Man setzt für $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ .

Weil $\frac{\pi}{2}$ die kleinste positive Nullstelle des Cosinus ist, wird im Intervall $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ nie durch Null dividiert.

a) Man berechne die Ableitung der Tangensfunktion.

b) Man gehe davon aus, daß die Tangensfunktion als Abbildung $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \to \mathbb{R}$ bijektiv offen und stetig ist und eine differenzierbare Umkehrfunktion $\varphi: \mathbb{R} \to ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ besitzt. (Machen Sie sich ein Bild!) Man berechne die Ableitung $\varphi'(x)$ .

**3. Aufgabe**

a) Sei $\cos\varphi = x$ und $\sin\varphi = y$ .

Man benutze u.a. das Additionstheorem für Sinus und Cosinus, um Formeln für $\cos\frac{\varphi}{2}$ und $\sin\frac{\varphi}{2}$ zu finden, die nur von $x$ und $y$ und nicht von $\varphi$ abhängen.

b) Man benutze diese Formeln zur Berechnung von $\cos(\pi/8)$ und $\cos(\pi/12)$ .
(Es wird nach exakten Lösungen gesucht, die sich mit Hilfe von Summen, Produkten und Quotienten natürlicher Zahlen und Quadratwurzeln natürlicher Zahlen schreiben lassen.)
Überprüfen Sie die Korrektheit Ihrer Lösung mit Taschenrechner oder Computer.