| **Analysis II SS07, Aufgabenblatt 6**<br>**M. Hortmann** | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Name(n)*** | | | | | | | ***Gruppennummer*** | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| ***Punkte*** | | | | | | | | |
| 1a | b | c | d | e | 2a | b | Summe | % bearbeitet |
| | | | | | | | | |

**Aufgabe 1**

Seien $E,F$ normierte Vektorräume, $\varphi : E \to F$ eine lineare Abbildung. Man zeigt leicht, daß $\varphi$ genau dann stetig ist, wenn $\varphi$ stetig in 0 ist.

a) Man zeige, daß $\varphi$ genau dann stetig in 0 ist, wenn $\varphi$ auf der abgeschlossenen Einheitskugel $B_1(0) := \{x \in E \,|\, \|x\| \leqslant 1\}$ beschränkt ist.

$\varphi$ ist also genau dann stetig, wenn $\|\varphi\| := \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|\varphi(x)\| < \infty$ .

b) Ist $\varphi$ stetig, so zeige man $\forall x \in E : \|\varphi(x)\| \leqslant \|\varphi\| \|x\|$ .

c) Seien $\varphi, \psi : E \to F$ zwei stetige lineare Abbildungen. Bekanntlich wird dann durch $(\psi + \varphi)(x) := \psi(x) + \varphi(x)$ eine weitere stetige lineare Abbildung $E \to F$ definiert.
Man zeige: $\|\psi + \varphi\| \leqslant \|\psi\| + \|\varphi\|$ .

d) Seien $\varphi : E \to F$ , $\psi : F \to G$ stetige lineare Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen. Bekanntlich ist dann $\psi \circ \varphi : E \to G$ ebenfalls linear und stetig.
Man zeige: $\|\psi \circ \varphi\| \leqslant \|\psi\| \|\varphi\|$ .

e) Man gebe ein Beispiel, bei dem $\|\psi \circ \varphi\| = \|\psi\| \|\varphi\|$ und eines, bei dem $\|\psi \circ \varphi\| < \|\psi\| \|\varphi\|$ . (Beweis!)

f) Freiwillige Sonderaufgabe: Sei $F$ ein normierter Vektorraum und $\varphi : \mathbb{R}^n \to F$ linear.
Man zeige: $\varphi$ ist stetig. (Einfaches Kompaktheitsargument.)

**Aufgabe 2**

Man betrachte die euklidische Norm im $\mathbb{R}^3$ als Abbildung $n : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ , $x \to \|x\|$ .
a) Man zeige, daß $n$ im Nullpunkt nicht differenzierbar ist.

b) Sei $v \in \mathbb{R}^2$ , $v \neq 0$ . Man berechne die Richtungsableitung $(\partial_v n)(v)$ .
Freiwillige Sonderaufgabe: $w \in \mathbb{R}^2$ stehe senkrecht auf $v$ . Man zeige $(\partial_w n)(v) = 0$ .
(In beiden Fällen: Keine Kettenregel benutzen!)

**Definitionen**:

Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $g: I \to F$ differenzierbar in $t_0 \in I$, so setzt man
$g'(t_0) := \lim_{h \to 0} \frac{g(t_0+h) - g(t_0)}{h} = \big(Dg(t_0)\big)(1)$ .

Man beachte, daß $g'(t_0) \in F$, während $Dg(t_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}, F)$ .
Die Räume $F$, $\mathscr{L}(\mathbb{R}, F)$ sind kanonisch isomorph via $F \ni v \to (h \to hv) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}, F)$ bzw. umgekehrt $\mathscr{L}(\mathbb{R}, F) \ni \varphi \to \varphi(1) \in F$, d.h. der Vektor $g'(t_0)$ und die lineare Abbildung $Dg(t_0)$ tragen dieselbe Information.

Sind $E,F$ Banachräume, $U \subset E$ offen, $f: U \to F$ differenzierbar in $x_0 \in U$ und $v \in E$, so legt man mit $c(t) := x_0 + tv$ die durch die Richtung $v$ bestimmte Gerade durch $x_0$ und setzt $\partial_v f(x_0) := (f \circ c)'(0)$ (**Richtungsableitung** von $f$ im Punkt $x_0$ in Richtung $v$ .)

Ist $E = \mathbb{R}^n$, so nennt man die Richtungsableitungen in Richtung der kanonischen Einheitsvektoren partielle Ableitungen und schreibt $\partial_i f(x_0) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) := \partial_{e_i} f(x_0)$

Bemerkung: Auch sonst wählt man bei Richtungsableitungen den Richtungsvektor $v$ häufig als Einheitsvektor, also normiert auf Länge 1, $\|v\| = 1$ .