Analysis II SS07, Aufgabenblatt 5
M. Hortmann

Name(n)							Gruppennummer	
Punkte								
1a	b	c	d	e	2a	b	Summe	% bearbeitet

Wir wissen, daß durch die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, die für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut und innerhalb jedes Kreises um Null gleichmäßig konvergiert, eine stetige Funktion $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert wird, die sogenannte Exponentialfunktion. Die Exponentialfunktion ist für reelle Argumente reell. Von besonderer Bedeutung ist die Funktionalgleichung:

$$\forall z, w \in \mathbb{C}: \exp(z+w) = \exp(z)\exp(w) \quad .$$

Es wurde definiert: $\cos z := \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz))$, $\sin z := \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$

Man überlegt leicht, daß auch Sinus und Cosinus stetige Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind, und daß sie für reelle Argumente reelle Werte annehmen. Dies sieht man auch an den Potenzreihen

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad .$$

Aufgabe 1:

a) Man zeige $\forall z \in \mathbb{C}: \cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

b) Man zeige, daß cos (3) < 0.

Da cos(0)=1 , folgt nach dem Zwischenwertsatz, daß für ein $0 < \eta < 3$ gilt: $\cos \eta = 0$.

c) Man benutze ein Stetigkeitsargument, um zu zeigen, daß es im Intervall $]0, \infty[$ eine kleinste Nullstelle der reellen Cosinusfunktion gibt.

Denn doppelten Wert der kleinsten positiven Nullstelle der reellen Cosinusfunktion nennt man π . Es stellt sich a posteriori heraus, daß es in $]0,3[$ nur die Nullstelle $\frac{\pi}{2}$ gibt.

d) Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion leite man eines der Additionstheoreme für Sinus oder Cosinus her:

$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w), \; \cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$$

e) Man zeige für jedes $z \in \mathbb{C}$: $\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos(z)$

Aufgabe 2:

a) Seien E,F Banachräume, $U \subset E$ offen, $f: U \rightarrow E$ eine in $x_0 \in U$ differenzierbare Abbildung. Man zeige, daß f in x_0 stetig ist.

b) Man zeige: Die durch $(x, y) \rightarrow x^2 + y^3$ gegebene Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist in $x_0 = 0$ differenzierbar.
Hinweis: es sollen keinerlei Differentiationsregeln benutzt werden. Sie sollen die Ableitung, also die f am besten approximierende (stetige) lineare Abbildung erraten und dann die in der Definition von Differenzierbarkeit vorkommende Abschätzung beweisen.