Analysis II SS07, Aufgabenblatt 4
M. Hortmann

Name(n)								*Gruppennummer*
Punkte								
1a	1b	2a	2b	3a	3b	4=20%	Summe **120**%	% bearbeitet

Bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen.

Ein Homöomorphismus zwischen topologischen Räumen ist eine bijektive Abbildung, die offen[1] und stetig ist. Wenn es einen Homöomorphismus zwischen zwei topologischen Räumen gibt, so nennt man diese homöomorph.

Aufgabe 1:
a) Seien $a,b\in\mathbb{R},\ a<b$. Man zeige: $]a,b[$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}$.
b) Man zeige: die Abbildung $f:\mathbb{R}-]0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x & \text{für } x\leqslant 0 \\ x-1 & \text{für } x>1 \end{cases}$ ist bijektiv und stetig, aber nicht offen.

Aufgabe 2:
Sei $f:M\to N$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Man erinnere sich an die Definition des Graphen $\mathrm{Graph}(f):=\{(x,f(x))\,|\,x\in M\}\subset M\times N$, versehe diesen mit der durch die Produkttopologie auf $M\times N$ induzierten Relativtopologie und zeige:

f ist genau dann stetig, wenn
die Abbildung $M\to\mathrm{Graph}(f)$, $x\to(x,f(x))$ ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 3:
Seien $a,b\in\mathbb{R},\ a<b$, $I:=]a,b[$, $f:I\to\mathbb{R}$ sei eine injektive stetige Abbildung.
Man zeige:
a) f ist streng monoton wachsend oder streng monoton fallend.
b) f ist offen.

Aufgabe 4:
Sei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ stetig. Für $k,n\in\mathbb{N},\ x\in[0,1],\ \frac{k-1}{n}\leqslant x<\frac{k}{n}$, setze man $f_n(x):=f\left(\frac{k}{n}\right)$ und zeige, daß die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{B}([0,1])$ gleichmäßig konvergiert mit Grenzwert f.
Hinweis: man muß ausnutzen, daß das Intervall [0,1] kompakt ist. Für das offene Intervall]0,1[wäre die Aussage nicht korrekt.

1 Eine Abbildung $\varphi:M\to N$ heißt offen, wenn für alle offenen Mengen $U\subset M$ auch $\varphi(U)\subset N$ offen ist. Bei einer bijektiven Abbildung ist dies natürlich äquivalent zur Stetigkeit der inversen Abbildung φ^{-1}.