Analysis II SS07, Aufgabenblatt 3 **M. Hortmann**									
Name(n)									***Gruppennummer***
Punkte									
1a	1b	1c	2a	2b	3a	3b	4	Summe	% bearbeitet

Bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen.

Wir benutzen die folgende Definition des Begriffs "Häufungspunkt": Ist *M* ein topologischer Raum und $L \subset M$, so heißt ein Punkt $x \in M$ Häufungspunkt von *L*, wenn jede offene Umgebung *U* von *x* (mindestens) einen Punkt von *L* enthält, der von *x* verschieden ist.

Man setzt $\overline{L} := \bigcap_{\substack{A \supset L \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$ und nennt diese Menge die *abgeschlossene Hülle* von L.

Als Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist $\overline{L}$ natürlich selbst abgeschlossen und nach Definition die kleinste abgeschlossene Menge, in der *L* enthalten ist.

1. Sei *M* ein topologischer Raum und $L \subset M$.

a) Man zeige $\overline{L} = \{x \in M \mid x \in L \text{ oder } x \text{ ist Häufungspunkt von } L\}$.

b) Sind $L, K \subset M$, so ist $\overline{L \cup K} = \overline{L} \cup \overline{K}$

c) Sind $L, K \subset M$, so ist $\overline{L \cap K} \subset \overline{L} \cap \overline{K}$. Wieso gilt die umgekehrte Inklusion i.a. nicht?

2. a),b) Sei $f: M \to N$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Man zeige:
f ist genau dann stetig, wenn für alle Teilmengen $L \subset M$ gilt: $f(\overline{L}) \subset \overline{f(L)}$.

3. Sei *M* ein topologischer Raum.

a) Man zeige: Ist $L \subset M$ zusammenhängend, so auch $\overline{L}$.

b) $f: M \to \mathbb{R}$ sei stetig und $f(M) \subset \mathbb{Z}$. Man zeige: $\{x \in M \mid f(x) = 77\}$ ist zshgd.

4. Sei $\varphi: M \to N$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, $\rho: M \to K$, $\sigma: N \to L$, $\psi: K \to L$ seien Abbildungen, für die gilt $\psi \circ \rho = \sigma \circ \varphi$, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & N \\ \downarrow \rho & & \sigma \downarrow \\ K & \xrightarrow{\psi} & L \end{array}$$

kommutiert.

Man versehe man die Mengen *K,L* mit den durch ρ, σ induzierten Finaltopologien, und zeige, daß dann ψ stetig ist.

Hinweis: die Aufgabe ist relativ einfach.