Analysis II SS07, Aufgabenblatt 2 **M. Hortmann**									
Name(n)									***Gruppennummer***
Punkte									
1a	1b	1c	2	3	4a	4b	4c	Summe	% bearbeitet

Bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen.

1. a) Sei M ein topologischer Raum. Man zeige: Sind die Teilmengen $K, L \subset M$ zusammenhängend und $K \cap L \neq \emptyset$, so ist $K \cup L$ zusammenhängend.

b) Sei M ein topologischer Raum und $x \in L \subset M$. Man zeige: Die Menge $\bigcup_{\substack{x \in A \subset L \\ A \text{ zshgd.}}} A$, d.h. die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen von L, die x als Element enthalten, ist zusammenhängend. (Man nennt diese Menge eine Zusammenhangskomponente von x in L.)

c) Man zeige, daß die Zusammenhangskomponenten verschiedener Punkte entweder gleich oder disjunkt sind.

2. Sei D_0 die "gepunktete Einheitskugel" im $\mathbb{R}^3$, also $D_0 := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| 0 < \|x\| < 1 \right\}$. Wäre diese Menge konvex, so wäre sie wegzusammenhängend und damit zusammenhängend. Man zeige, daß sie nicht konvex aber trotzdem wegzusammenhängend ist.

Ein Raum heißt total unzusammenhänged, wenn die einzigen zusammenhängenden Teilmengen die einpunktigen Mengen sind.

3. Man zeige, daß $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Topologie total unzusammenhängend ist.
Hinweis: man benutze, daß zwischen zwei rationalen Zahlen immer eine irrationale Zahl liegt.

4. Seien $(M, \mathcal{O}_M)$, $(N, \mathcal{O}_N)$ topologische Räume.

a) Man zeige: $\mathcal{B} := \left\{ U \times V \middle| U \in \mathcal{O}_M, V \in \mathcal{O}_N \right\}$ ist Basis einer Topologie auf $M \times N$.
Diese Topologie nennt man die Produkttopologie.

b) Man zeige, daß die Abbildung $M \times N \to M$, $(x, y) \to x$, stetig ist.
c) Man zeige, daß für $y_0 \in N$ die Abbildung $M \to M \times N$, $x \to (x, y_0)$, stetig ist.

d) Freiwillig: Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Man zeige, daß f genau dann stetig ist, wenn der Graph von f, also die Teilmenge $\left\{ (x, f(x)) \middle| x \in M \right\}$ von $M \times N$ zshgd. ist.