Analysis II SS07, Aufgabenblatt 1 **M. Hortmann**							
Name(n)							***Gruppennummer***
Punkte							
1a	1b	2a	2b	3a	3b	Summe	% bearbeitet

Bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen.

1. a) Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, *Y* eine Menge und $f: Y \to X$ eine Abbildung. Man zeige, daß durch $\mathcal{O}_Y := \left\{ f^{-1}(U) \middle| U \in \mathcal{O}_X \right\}$ eine Topologie auf *Y* erklärt wird (die sog. *Initialtopologie*) und daß f dann stetig ist.

(Ein wichtiger Spezialfall ist $Y \subset X$, wobei $f: Y \to X$ gegeben ist durch $y \to y$. Offenbar ist hier $\mathcal{O}_Y := \left\{ U \cap Y \middle| U \in \mathcal{O}_X \right\}$; man spricht von der *Relativtopologie* auf Y .)

b) Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, *Y* eine Menge und $f: X \to Y$ eine Abbildung. Man zeige, daß durch $\mathcal{O}_Y := \left\{ V \subset Y \middle| f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X \right\}$ eine Topologie auf *Y* erklärt wird (die sog. *Finaltopologie*) und daß f dann stetig ist.

2. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.
Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ heißt **Basis** der Topologie, wenn jede Menge in $\mathcal{O}$ sich als Vereinigung von Mengen, die in $\mathcal{B}$ liegen, schreiben läßt.
Eine Teilmenge $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$ heißt **Subbasis** der Topologie, wenn die Menge der endlichen Durchschnitte, die sich aus Elementen von $\mathcal{S}$ bilden lassen, eine Basis von $\mathcal{O}$ bilden.

a) Man zeige: $\mathcal{B}$ ist genau dann Basis einer Topologie auf X, wenn
$\forall x \in X, U_x, V_x \in \mathcal{B} \ \exists W_x \in \mathcal{B}: \ W_x \subset U_x \cap V_x$ [1]

b) Setzt man $\mathcal{S}_1 = \left\{ \{x | x < a\} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$, $\mathcal{S}_2 = \left\{ \{x | x > b\} \middle| b \in \mathbb{R} \right\}$ und $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, so bildet $\mathcal{S}_2$ eine Subbasis der gewöhnlichen Topologie auf $\mathbb{R}$.

1 Mit U_x ist gemeint, daß $x \in U$. Mit dieser Schreibweise vermeidet man den gleichbedeutenden komplizierteren Ausdruck $\forall x \in X, U, V \in \mathcal{B} \ \big((x \in U \wedge x \in V) \to \big(\exists W \in \mathcal{B}: (x \in W) \wedge (W \subset U \cap V) \big) \big)$

3. Auf $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ betrachte man die durch $x \sim y :\Leftrightarrow x, y$ sind linear abhängig gegebene Äquivalenzrelation. Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnet man als zweidimensionalen (reell)-projektiven Raum $\mathbb{P}^2$. Die Äquivalenzklassen sind also die Geraden durch den Nullpunkt im $\mathbb{R}^3$. Da jede dieser Geraden die Sphäre S^2 in gegenüberliegenden Punkten schneidet, kann man sich die Äquivalenzklassen, bzw die Elemente des $\mathbb{P}^2$ auch als Paare gegenüberliegender Punkte auf der S^2 vorstellen.

Ist $x \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$, so bezeichnen wir mit [x] die Äquivalenzklasse mit dem Repräsentanten x; die durch $x \to [x]$ gegebene Abbildung $\pi : \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{P}^2$ heißt *kanonische Projektion.*

Auf $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ betrachte man die übliche Topologie, und auf $\mathbb{P}^2$ die durch π definierte Finaltopologie (siehe 1b). Man zeige:

a) Die durch $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ [2] gegebene Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}^2$ ist injektiv und stetig.

b) Die Topologie auf $\mathbb{P}^2$ ist hausdorffsch. (Interessant.)

---

2 Man schreibt kurz $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ statt $\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}\right]$