

## Relationen, Funktionen, Abbildungen

### Geordnete Paare

Häufig möchte man zwei Objekte  $a, b$  zu einem geordneten Paar  $(a, b)$  zusammenfassen, also einem Objekt, welches die Information enthält, daß  $a$  seine erste und  $b$  seine zweite Komponente ist. Weil  $\{a, b\}$  und  $\{b, a\}$  dieselben Elemente haben, sind diese beiden Mengen gleich. Daher repräsentiert die aus  $a$  und  $b$  gebildete Zweiermenge kein geordnetes Paar.

Man könnte nun die Existenz geordneter Paare einfach axiomatisch fordern. Es ist aber in gewisser Weise eleganter, eine mengentheoretische Konstruktion anzugeben, die die von einem geordneten Paar zu fordernden Eigenschaften besitzt.

Und zwar setzt man  $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$  und nennt eine so gebildete Menge ein Kuratowski Paar.

In einem Kuratowski-Paar  $(a, b)$  nennen wir nun  $a$  die erste und  $b$  die zweite Komponente. Man kann unschwer zeigen, daß zwei Kuratowski-Paare  $(a, b)$  und  $(c, d)$  genau dann gleich sind, wenn  $a=c$  und  $b=d$ . (Übungsaufgabe!)

Im folgenden benutzen wir einfach die Notation  $(a, b)$  und die Tatsache, daß es sich dabei um eine Menge handelt, bei der man von einer ersten und zweiten Komponente reden kann.

Geordnete Paare kennt man aus der analytischen Geometrie, wo man nach Wahl eines Koordinatensystems Punkte der Ebene mit geordneten Paaren von Zahlen identifiziert.

### Cartesisches Produkt

Sind zwei Mengen  $M, N$  gegeben, so definieren wir ihr cartesisches Produkt  $M \times N$  als Menge aller geordneten Paare, deren erste Komponente in  $M$  und deren zweite Komponente in  $N$  liegt, also  $M \times N := \{(a, b) \mid a \in M \wedge b \in N\}$

### Relationen

Eine Relation  $R$  ist definitionsgemäß eine Menge, deren sämtliche Elemente geordnete Paare sind. Man schreibt dabei häufig  $xRy$  statt  $(x, y) \in R$ .

Offenbar ist eine Relation  $R$  immer Teilmenge eines cartesischen Produkts, d.h. es gibt Mengen  $M, N$  mit  $R \subset M \times N$ .

Man setzt  $D(R) := \{x \in M \mid \exists y \in N : (x, y) \in R\}$ , d.h.  $D(R)$  ist die Menge der ersten Komponenten der in der Relation vorkommenden geordneten Paare.

Ist eine Relation  $F$  gegeben, in der es nie verschiedene geordnete Paare mit gleicher erster Komponente gibt, so nennt man  $F$  eine **Funktion**.

Demnach ist die Relation  $\{(a, 1), (b, 1)\}$  eine Funktion,  $\{(a, 1), (a, 2)\}$  dagegen nicht.

## Abbildungen

Zu einer Abbildung  $f: M \rightarrow N$  gehört eine Menge  $M$ , aus der abgebildet wird, der sogenannte Definitionsbereich von  $f$ , eine Menge  $N$  in die abgebildet wird, der sogenannte Wertebereich von  $f$  und eine Funktion  $F \subset M \times N$ , die man auch den **Graph von  $f$**  oder die Wertepaarmenge von  $f$  nennt, wobei  $D(F) = M$ .

Zu jedem  $x \in M$  gibt es also ein eindeutig bestimmtes  $y \in N$  mit  $(x, y) \in F$ , welchem man den Namen  $f(x)$  gibt. Damit läßt sich auch schreiben:  $F = \text{Graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in M\}$ .

Häufig gibt man bei der Definition einer Abbildung neben Definitionsbereich und Wertebereich einfach eine Formel für  $f(x)$  an.

Zum Beispiel könnte man schreiben: „Sei  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  gegeben durch  $x \rightarrow x^2$ “, oder „Sei  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  gegeben durch  $f(x) = x^2$ “, was dasselbe bedeutet.

In beiden Fällen werden der Definitions- und Wertebereich benannt, sowie die Wertepaartabelle  $F = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ , d.h. die zugrundeliegende Funktion.

Die Abbildung ab  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,  $f(x) = x^2$  ist durchaus verschieden von der eben betrachteten, denn sie hat einen anderen Wertebereich, obwohl die Wertepaarmenge, also die Funktion  $F$ , sich nicht geändert hat.

Ist eine Abbildung  $f: M \rightarrow N$  gegeben mit der Wertepaarmenge  $F$  und ist  $K \subset M$ , so erhält man eine neue Abbildung  $g: K \rightarrow N$  mit der Wertepaarmenge  $F \cap (K \times N) = \{(x, f(x)) \mid x \in K\}$ , d.h. man hat nur den Definitionsbereich eingeschränkt und läßt die Funktion ansonsten unverändert. Man nennt  $g$  auch die „Einschränkung von  $f$  auf  $K$ “ und schreibt  $g = f|_K$ .

## Verknüpfung von Abbildungen

Sind  $f: M \rightarrow N$  und  $g: N \rightarrow K$  Abbildungen, so wird durch  $(g \circ f)(x) := g(f(x))$  eine neue Abbildung  $g \circ f: M \rightarrow K$  definiert. Man spricht auch von „Hintereinanderschaltung oder Verknüpfung von Abbildungen“.

Ist  $h: K \rightarrow L$  eine weitere Abbildung, so gilt  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ , so daß man auf Klammersetzungen beim Verknüpfen von Abbildungen verzichten kann, da unabhängig von der Beklammerung dasselbe herauskommt.

Sind  $f: M \rightarrow M$  und  $g: M \rightarrow M$  Abbildungen, so ist im allgemeinen  $f \circ g \neq g \circ f$ .

## Die identische Abbildung

Ist  $M$  eine nicht-leere Menge, so nennt man die Abbildung  $M \rightarrow M$ , durch die jedes Element von  $M$  auf sich selbst abgebildet wird, die „identische Abbildung auf  $M$ “,  $id_M$ .

Ist  $f: M \rightarrow N$  eine Abbildung, so gilt offenbar  $f = id_N \circ f = f \circ id_M$ .

## Bildmengen und Urbildmengen

Sei  $f: M \rightarrow N$  eine Abbildung.

Ist  $A \subset M$ , so setzt man  $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$  und nennt dies die „Bildmenge von  $A$  bzgl.  $f$ “.  
Es ist  $f(A) \subset N$

Ist  $B \subset N$ , so setzt man  $f^{-1}(B) := \{x \in M \mid f(x) \in B\}$  und nennt dies „die Urbildmenge von  $B$  bzgl.  $f$ “. Es ist  $f^{-1}(B) \subset M$ . (Warnung: dies hat nichts mit „Umkehrfunktion“ zu tun; die Definition bezieht sich auf beliebige Abbildungen)

Ich liste jetzt eine Reihe „mengenalgebraischer“ Eigenschaften ohne Beweis. Die Beweise liegen etwa auf Übungsaufgabenniveau.

$A \subset f^{-1}(f(A))$ . Die umgekehrte Inklusion gilt i.a. nicht! Finden Sie ein Gegenbeispiel!  
 $B = f(f^{-1}(B))$

Sind  $U, V \subset M$ , so gilt:

$$f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$$

$f(U \cap V) \subset f(U) \cap f(V)$ . Die umgekehrte Inklusion gilt i.a. nicht! Finden Sie ein Gegenbeispiel!

Sind  $W, Z \subset N$ , so gilt:

$$f^{-1}(W \cup Z) = f^{-1}(W) \cup f^{-1}(Z)$$

$$f^{-1}(W \cap Z) \subset f^{-1}(W) \cap f^{-1}(Z)$$

Setzen wir für  $U \subset M$   $\bar{U} := M - U$  und für  $W \subset N$   $\bar{W} := N - W$  so ist  
 $f^{-1}(\bar{W}) = \overline{f^{-1}(W)}$ .

Die Urbildmengen verhalten sich offenbar viel schöner!

## Injektiv, surjektiv, bijektiv

Sei  $f: M \rightarrow N$  eine Abbildung.

$f$  heißt **injektiv**, wenn  $\forall x, y \in M : (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$ , wenn es also nie vorkommt, daß verschiedene Elemente von  $M$  auf dasselbe Element von  $N$  abgebildet werden.

$f$  heißt **surjektiv**, wenn  $\forall y \in N \exists x \in M : f(x) = y$ , wenn also jedes Element von  $N$  als Bild eines Elements von  $M$  vorkommt. Dies ist gleichbedeutend mit  $f(M) = N$ .

$f$  heißt **bijektiv**, wenn  $f$  injektiv und surjektiv ist.

Ist  $f: M \rightarrow N$  bijektiv, so gibt es zu jedem  $y \in N$  ein eindeutig bestimmtes  $x \in M$  mit  $f(x) = y$ . Durch die Zuordnung  $y \rightarrow x$  wird offenbar eine ebenfalls bijektive Abbildung  $N \rightarrow M$  definiert, die den Namen  $f^{-1}$  bzw. „Umkehrabbildung von  $f$ “ bekommt. Offenbar gilt:  
 $f \circ f^{-1} = id_N$ ,  $f^{-1} \circ f = id_M$ .

## Einige weitere Eigenschaften von Abbildungen

die zum Teil gar nicht so einfach zu beweisen sind:

Es gibt genau dann eine surjektive Abbildung  $M \rightarrow N$  gibt, wenn es eine injektive Abbildung  $N \rightarrow M$  gibt.

Wenn es eine injektive und eine surjektive Abbildung  $M \rightarrow N$  gibt, dann auch eine bijektive. (Satz von Schröder Bernstein)

Es gibt keine surjektive Abbildung einer Menge in ihre Potenzmenge.

Der Beweis dieser Aussage ist so schön und einfach, daß er hier gebracht werden muß:

Sei  $M$  eine Menge und  $f: M \rightarrow \wp(M)$  surjektiv.

Wir bilden nach dem modernen Mengenbildungsaxiom folgende Teilmenge von  $M$ :

$$R := \{m \in M \mid m \notin f(m)\} .$$

Als Teilmenge von  $M$  ist  $R$  Element von  $\wp(M)$ . Weil  $f$  surjektiv ist, kommt  $R$  als Bild eines Elementes  $r \in M$  vor. Es gibt also ein  $r \in M$  mit  $f(r) = R$ . Jetzt muß  $r \in R$  oder  $r \notin R$  gelten, und wir zeigen gleich, daß beides nicht stimmen kann:

Ist  $r \in R = f(r)$ , so gilt nach Definition von  $R$ :  $r \notin R$ .

Ist umgekehrt  $r \notin R = f(r)$ , so gilt nach Definition von  $R$  gerade:  $r \in R$ .

Der Widerspruch bedeutet, daß etwas an den Voraussetzungen nicht stimmt, und die einzige Voraussetzung war die Existenz der surjektiven Abbildung  $f: M \rightarrow \wp(M)$ .

Gibt es eine bijektive Abbildung zwischen 2 Mengen, so heißen diese „gleichmächtig“.

Eine Menge und ihre Potenzmenge sind also niemals gleichmächtig.

Erinnern wir uns an die Bezeichnung  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$  und betrachten die durch  $x \rightarrow x+1$  gegebene Abbildung  $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ . Diese Abbildung ist injektiv, wie man leicht überlegt. Wir haben also eine injektive Abbildung von  $\mathbb{N}_0$  in eine echte Teilmenge von  $\mathbb{N}_0$  d.h. eine Teilmenge, die nicht gleich der gesamten Menge ist.

Eine solche Eigenschaft zeichnet unendliche gegenüber endlichen Mengen aus.

Wir definieren:

Eine Menge  $M$  heißt **unendlich**, wenn es eine injektive Abbildung von  $M$  in eine echte Teilmenge von  $M$  gibt.

Eine Menge heißt **endlich**, wenn sie nicht unendlich ist.

Aus den bisherigen Mengenbildungsaxiomen läßt sich die Existenz einer unendlichen Menge nicht ableiten, man muß sie axiomatisch fordern: dies ist das **Unendlichkeitsaxiom**.