Topologie, SS2015
M. Hortmann

Zusammenhängende Mengen

Sei im folgenden jeder topologische Raum hausdorffsch.

Ist M ein topologischer Raum und $L \subset M$, so heißt L **unzusammenhängend**, wenn es zwei disjunkte offene Teilmengen von M gibt, die L überdecken und die beide mit L nicht-leeren Schnitt haben.

L heißt **zusammenhängend**, wenn L nicht unzusammenhängend ist.

Indem wir den Fall $L=M$ betrachten, ist M als Ganzes unzusammenhängend, wenn es zwei nicht-leere offene Teilmengen gibt, die M überdecken.

Man zeigt leicht, daß $L \subset M$ genau dann zusammenhängend ist, wenn L als topologischer Raum, versehen mit der von M ererbten Relativtopologie, zusammenhängend ist.

Anschaulich ist also eine Menge zusammenhängend, wenn sie sich nicht durch disjunkte offene Mengen trennen läßt.

Es ist leicht zu sehen, daß endliche Mengen mit mindestens zwei Elementen nicht zusammenhängend sind. Auch wurde in der Vorlesung gezeigt, daß $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Topologie nicht zusammenhängend ist. Genügend Beispiele für zusammenhängende Mengen sehen wir später.

Der Zusammenhangsbegriff ist in der Topologie sehr fruchtbar.

Zunächst ein Hilfssatz, dessen Aussage intuitiv klar sein sollte:
Satz: Sei $(L_i) i \in I$ eine Familie zusammenhängender Teilmengen von M, und es sei $\bigcap_{i \in I} L_i \neq \emptyset$.
Dann ist $L := \bigcup_{i \in I} L_i$ zusammenhängend.
Haben also zusammenhängende Mengen einen gemeinsamen Punkt, so ist ihre Vereinigung zusammenhängend.

Beweis:
Nehmen wir an, L sei nicht zusammenhängend und versuchen, einen Widerpruch zu finden:
Nach Annahme gibt es offene Teilmengen $U, V \subset M$ mit $L \subset U \cup V$, und $U \cap L \neq \emptyset$, $V \cap L \neq \emptyset$.

Sei $x \in \bigcap_{i \in I} L_i$ für das Folgende fest gewählt. x liegt also in jedem L_i . Dann ist auch $x \in L$, und somit auch $x \in U \cup V$. Sei oBdA $x \in U$, also $x \in U \cap L_i$ für jedes $i \in I$, und auch $x \in U \cap L$.

Gäbe es ein $y \in V \cap L$, also $y \in V \cap L = V \cap \bigcup_{i \in I} L_i = \bigcup_{i \in I} V \cap L_i$, so auch ein $i \in I$ mit $y \in V \cap L_i$. Es gilt gleichzeitig $x \in U \cap L_i$. Dies widerspricht der Voraussetzung, daß L_i zusammenhängend ist, denn es ergibt sich $L_i \subset L \subset U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, $U \cap L_i \neq \emptyset$ und $V \cap L_i \neq \emptyset$.

Also ist $V \cap L = \emptyset$, im Widerspruch zu obigen Ausgangsbedingungen.

In der Vorlesung hatten wir den folgenden Satz formuliert und bewiesen:

Satz: Ist $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge (d.h. $\forall n\in\mathbb{N}$: $L_n\subset L_{n+1}$)zusammenhängender Mengen, so ist $L:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$ zusammenhängend.

Diese Aussage ist jetzt nur ein einfaches Korollar:
Die leere Menge ist zusammenhängend. Also sind folgende Fälle zu unterscheiden:
1. alle L_n sind leer. Dann ist auch ihre Vereinigung leer und damit zusammenhängend.
2. Es gibt ein $n_0\in\mathbb{N}$ mit $L_{n_0}\neq\emptyset$. Dann ist $L:=\bigcup_{n\geq n_0} L_n$ und $\emptyset\neq L_{n_0}=\bigcap_{n\geq n_0} L_n$.

Damit greift der vorige Satz, um den Zusammenhang von L zu beweisen.
Dies finde ich eleganter als den in der Vorlesung gegebenen Beweis.