Topologie, SS2015
M. Hortmann

Überdeckungen

Ist M eine Menge, so nennt man eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ von Teilmengen von M **Überdeckung** von $L\subset M$, wenn $L\subset\bigcup_{i\in I} U_i$, wenn also jedes Element von L in einem U_i vorkommt.

Man spricht von einer endlichen Überdeckung, wenn die Indexmenge I endlich ist und von einer abzählbaren Überdeckung, wenn sie abzählbar ist. Ist M ein topologischer Raum und sind alle U_i offen, so spricht man von einer **offenen Überdeckung** von L.

Eine Überdeckung $(V_j)_{j\in J}$ von L heißt **Teilüberdeckung** von $(U_i)_{i\in I}$, wenn $J\subset I$ und $\forall\, j\in J: V_j=U_j$.

Eine Teilmenge K des topologischen Raums M heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Ist also $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung der kompakten Teilmenge $K\subset M$, so gibt es endlich viele Indizes $i_1,\ldots i_n\in I$ so daß $K\subset U_{i_1}\cup\ldots\cup U_{i_n}$.

Sind $(V_j)_{j\in J}$ und $(U_i)_{i\in I}$ Überdeckungen von $L\subset M$, so heißt $(V_j)_{j\in J}$ **feiner** als $(U_i)_{i\in I}$, bzw. $(V_j)_{j\in J}$ **Verfeinerung von** $(U_i)_{i\in I}$, wenn $\forall\, j\in J\,\exists\, i\in I: V_j\subset U_i$, oder was dasselbe bedeutet: es gibt eine Abbildung $\sigma: J\to I:\ V_j\subset U_{\sigma(j)}$. Offenbar ist eine Teilüberdeckung eine Verfeinerung.

Wenn man zeigen will, daß eine Teilmenge $K\subset M$ kompakt ist, geht man aus von einer beliebigen offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von K. Oft ist es dann möglich, zunächst eine endliche Verfeinerung $(V_j)_{j\in J}$ zu konstruieren. Damit ist dann aber $(U_{\sigma(j)})_{j\in J}$ eine endliche Teilüberdeckung von $(U_i)_{i\in I}$ Auf diese Weise dient die Verfeinerung als technisches Hilfmittel bei Kompaktheitsbeweisen.