Topologie, SS2015
M. Hortmann

Überdeckungen und Kompaktheit

Ist M eine Menge, so nennt man eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ von Teilmengen von M **Überdeckung** von $L\subset M$, wenn $L\subset\bigcup_{i\in I} U_i$, wenn also jedes Element von L in einem U_i vorkommt.

Man spricht von einer endlichen Überdeckung, wenn die Indexmenge I endlich ist und von einer abzählbaren Überdeckung, wenn sie abzählbar ist. Ist M ein topologischer Raum und sind alle U_i offen, so spricht man von einer **offenen Überdeckung** von L.

Eine Überdeckung $(V_j)_{j\in J}$ von L heißt **Teilüberdeckung** von $(U_i)_{i\in I}$, wenn $J\subset I$ und $\forall\, j\in J: V_j=U_j$.

Eine Teilmenge K des topologischen Raums M heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Ist also $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung der kompakten Teilmenge $K\subset M$, so gibt es endlich viele Indizes $i_1,\ldots i_n\in I$ so daß $K\subset U_{i_1}\cup\ldots\cup U_{i_n}$.

Sind $(V_j)_{j\in J}$ und $(U_i)_{i\in I}$ Überdeckungen von $L\subset M$, so heißt $(V_j)_{j\in J}$ **feiner** als $(U_i)_{i\in I}$, bzw. $(V_j)_{j\in J}$ **Verfeinerung von** $(U_i)_{i\in I}$, wenn $\forall\, j\in J\,\exists\, i\in I: V_j\subset U_i$, oder was dasselbe bedeutet: es gibt eine Abbildung $\sigma: J\to I:\ V_j\subset U_{\sigma(j)}$. Offenbar ist eine Teilüberdeckung eine Verfeinerung.

Wenn man zeigen will, daß eine Teilmenge $K\subset M$ kompakt ist, geht man aus von einer beliebigen offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von K. Oft ist es dann möglich, zunächst eine endliche Verfeinerung $(V_j)_{j\in J}$ zu konstruieren. Damit ist dann aber $(U_{\sigma(j)})_{j\in J}$ eine endliche Teilüberdeckung von $(U_i)_{i\in I}$ Auf diese Weise dient die Verfeinerung als technisches Hilfmittel bei Kompaktheitsbeweisen.

Sätze über kompakte Mengen

Satz: Jede kompakte Teilmenge eines Hausdorffraums ist abgeschlossen.

Beweis:
Gegeben sei also ein topologischer Raum M und eine kompakte Teilmenge $K\subset M$.
Es soll gezeigt werden, daß $M\setminus K$ offen ist.
Sei dazu $x_0\in M\setminus K$ ein beliebiger Punkt. Gezeigt werden muß: es gibt eine offene Umgebung U von x_0, die keinen Punkt von K enthält.

Wegen der Hausdorffeigenschaft können wir zu jedem $x\in K$ eine offene Umgebung U_x von x_0 und eine offene Umgebung V_x von x wählen, die leeren Schnitt haben. Die $(V_x)_{x\in K}$ bilden eine offene Überdeckung von K. Wegen der Kompaktheit von K gibt es eine dazu eine endliche Teilüberdeckung $V_{x_1},\ldots,V_{x_n}$. Setzen wir der Übersichtlichkeit halber $U_i:=U_{x_i}$ und $V_i:=V_{x_i}$ und weiterhin $U:=U_1\cap\ldots\cap U_n$.

U ist eine offene Umgebung von x_0. Wir müssen zeigen, daß $U\cap K=\emptyset$:

$$U \cap K \subset U \cap \bigcup_{i=1}^{n} V_i = \bigcup_{i=1}^{n} U \cap V_i = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\left(\bigcap_{j=1}^{n} U_j \right) \cap V_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} U_j \right) \cap (U_i \cap V_i) \right) =$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} \left(\left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} U_j \right) \cap \emptyset \right) = \emptyset$$

Satz: Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt.

Beweis:
Gegeben sei also ein topologischer Raum M und eine kompakte Teilmenge $K \subset M$ und eine abgeschlossene Teilmenge $L \subset K$. Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von L und nimmt man noch die offene Menge $U := M \setminus L$ hinzu, so hat man eine offene Überdeckung M und damit erst recht von K. Zu dieser gibt es wegen der Kompaktheit von K eine endliche Teilüberdeckung. Falls darin die Menge $U = M \setminus L$ vorkommt, kann man diese auch weglassen und behält eine Überdeckung von L. Übrig bleibt so eine endliche Teilüberdeckung von L der ursprünglichen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$.

Satz: Kompakte Teilmengen eines metrischen Raums sind beschränkt.
Beweis: trivial, siehe Vorlesung.

Satz: Bilder kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen sind kompakt.
Beweis: siehe Vorlesung.

Satz: endliche Vereinigungen kompakter Mengen sind kompakt.
Beweis: trivial, siehe Vorlesung

Satz: Produkte kompakter Mengen sind kompakt.

Beweis: seien M,N topologische Räume, $K \subset M$, $L \subset N$ seien kompakt.
.
$(U_i)_{i \in I}$ sei eine offene Überdeckung von $K \times L$. Offene Rechtecke bilden eine Basis der Produkttopologie. Zu jedem $(x, y) \in K \times L$ gibt es also ein $i \in I$ und offene Umgebungen $U_{x,y}$ von x und $V_{x,y}$ von y mit $(x, y) \in U_{x,y} \times V_{x,y} \subset U_i$. Damit ist $(U_{x,y} \times V_{x,y})_{(x,y) \in K \times L}$ eine Verfeinerung der Ausgangsüberdeckung. Wir werden jetzt eine endliche Verfeinerung von $(U_{x,y} \times V_{x,y})_{(x,y) \in K \times L}$ konstruieren und haben damit eine endliche Teilüberdeckung der Ausgangsüberdeckung.

Zu jedem $x \in K$ bilden die Mengen $(V_{x,y})_{y \in L}$ eine offene Überdeckung von L.
Wegen der Kompaktheit von L gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(V_{x,y_j})_{j \in J_x}$, wobei J_x eine von $x \in K$ abhängige endliche Menge ist.
Setzen wir jetzt $U_x := \bigcap_{j \in J_x} U_{x,y_j}$, so ist U_x eine offene Umgebung von x und damit $(U_x)_{x \in K}$ eine offene Überdeckung von K . Wegen der Kompaktheit von K gibt es dazu eine endliche Teilüberdeckung $(U_{x_i})_{i \in E}$ für eine endliche Menge E. Mit den Schreibweisen $U_i := U_{x_i}$, $J_i := J_{x_i}$ und $V_{ij} := V_{x_i, y_j}$ ergibt sich:

$(U_i \times V_{ij})_{i \in E, j \in J_i}$ ist nun eine endliche offene Überdeckung von $K \times L$, und es handelt sich offenbar um eine Verfeinerung der Überdeckung $(U_{x,y} \times V_{x,y})_{(x,y) \in K \times L}$. Fertig!

Wenn wir jetzt noch zeigen, daß endliche abgeschlossene Intervalle in $\mathbb{R}$ kompakt sind, folgt induktiv sofort, daß endliche abgeschlossene "Hyperquader" im $\mathbb{R}^n$ kompakt sind. Da jede beschränkte Menge in einen solchen eingeschlossen werden kann, sind beschränkte abgeschlossene Mengen im $\mathbb{R}^n$ kompakt.

Da stetige Funktionen kompakte Mengen auf kompakte Mengen abbilden, und eine reellwertige stetige Funktion daher eine kompakte Menge auf eine beschränkte abgeschlossene Menge reeller Zahlen abbildet, welche daher ein Maximum und ein Minimum besitzt, nehmen solche Funktionen auf kompakten Mengen ihr Maximum und ihr Minimum an. Im $\mathbb{R}^n$ nehmen daher stetige Funktionen auf beschränkten abgeschlossenen Mengen ihr Maximum und ihr Minimum an.

In einem unendlichdimensionalen Hilbertraum ist übrigens die abgeschlossene Einheitskugel nicht kompakt, obwohl offensichtlich beschränkt und abgeschlossen:
Nimmt man z.B. konkret den Raum H der quadratsummierbaren reellen Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}$, $\sum_n |a_n|^2 < \infty$, so hat mit mit $\|a\| := \sqrt{\sum_n |a_n|^2}$ eine Norm. e_i bezeichne die Folge, die an der i-ten Stelle eine 1 besitzt und sonst nur aus Nullen besteht. Dann ist $\|e_i\| = 1$ und $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ für $i \neq j$.

Man zeigt leicht, daß alle e_i zusammen eine abgeschlossene Teilmenge des Gesamtraums H bilden. Nimmt man alle offenen Kugeln mit Radius $\sqrt{2}/2$ um jedes e_i, so hat man eine offene Überdeckung dieser unendlich vielen Punkte durch disjunkte Mengen, die natürlich keine endliche Teilüberdeckung besitzen kann. Also ist die Menge der e_i nicht kompakt. Als abgeschlossene Teilmenge der abgeschlossenen Einheitskugel müßte sie dies aber sein, wenn letztere kompakt wäre.