Topologie, SS2015
M. Hortmann

"Überabzählbare Reihen" sind divergent

Sei I eine überabzählbar unendliche Menge und sei $\forall i \in I: \epsilon_i > 0$.

Als Grenzwert der zugehörigen Reihe setzen wir definitionsgemäß an:

$$. \sum_{i \in I} \epsilon_i := \sup \left\{ \sum_{j \in J} \epsilon_j \mid J \subset I \text{ endlich} \right\} .$$

Dieser Wert ist zwangsläufig unendlich, wie man in Folgendem sehen wird.
D.h. solche Reihen sind uninteressant.

Zum Beweis definiere man für jedes $n \in \mathbb{N}$: $J_n := \left\{ i \in I \;\middle|\; \epsilon_i \geq \frac{1}{n} \right\}$.
Offenbar gilt $J_n \subset J_{n+1}$, und auch $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$, denn jedes ϵ_i muß ja in irgendeinem J_n liegen.

Wären alle J_n endlich, so wäre I eine abzählbare Vereinigung von endlichen Mengen, also abzählbar, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Ist aber eines der J_n eine unendliche Menge, so ist obiges Supremum unendlich.
(Man würde ja beliebig oft einen Wert von mindestens $1/n$ aufsummieren.)