Topologie, SS2015
M. Hortmann

Kompakte metrische Räume

Im folgenden seien alle topologischen Räume Hausdorffräume.

Ein Punkt heißt **Häufungspunkt** einer Folge, wenn in jeder offenen Umgebung dieses Punktes unendlich viele Folgenglieder liegen.
Ein Raum *K* heißt **folgenkompakt**, wenn in ihm jede Folge einen Häufungspunkt besitzt.

Sei *M* ein metrischer Raum, $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von *M*.
$\delta > 0$ heißt Lebesgue-Zahl der Überdeckung, wenn jede Teilmenge von *M* mit Durchmesser kleiner als δ in einer der überdeckenden Mengen liegt.

Dabei ist der Durchmesser einer Teilmenge $L \subset M$ definiert als
$|L| := \sup_{x,y\in L} d(x,y)$, wobei natürlich $|L| = \infty$ möglich ist. Mengen mit endlichem Durchmesser heißen beschränkt.

Ein metrischer Raum heißt total beschränkt, wenn für ihn zu jedem ε>0 eine offene Überdeckung durch endlich viele ε-Kugeln existiert.

Hilfssatz 1: Jede offene Überdeckung eines folgenkompakten Raums besitzt eine Lebesgue Zahl.
Hilfssatz 2: Ein folgenkompakter metrischer Raum ist total beschränkt.

Satz: Jeder folgenkompakte metrische Raum ist kompakt.
Beweis des Satzes: wir benutzen die beiden Hilfssätze, die wir dann im Anschluß beweisen.

Sei also $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung des folgenkompakten metrischen Raums *K*. Wir konstruieren im Folgenden eine endliche Teilüberdeckung:

Lt. Hilfssatz 1 existiert eine Lebesgue-Zahl $\delta > 0$ eine Lebesgue-Zahl für diese Überdeckung. Jede Kugel mit Radius $\epsilon = \delta/3$ hat den Durchmesser $2\delta/3 < \delta$. Weil es lt. Hilfssatz 2 eine endliche Überdeckung von *K* durch ϵ-Kugeln gibt, sagen wir $V_1, \ldots, V_n$, deren jede den Durchmesser $2\delta/3 < \delta$ besitzt, gibt es lt. Definition von Lebesgue-Zahl Mengen $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$ aus der Ausgangs-Überdeckung (U_i) mit $V_1 \subset U_{i_1}, \ldots, V_n \subset U_{i_n}$. Offenbar bilden daher die $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$ eine endliche Teilüberdeckung der Ausgangsüberdeckung, und eine solche war gesucht.

Beweis von Hilfssatz 1:
Wir nehmen an, es gebe keine Lebesgue-Zahl, d.h.
$\forall \delta > 0 \, \exists L \subset K : |L| < \delta$ und $\forall i \in I : L \not\subset U_i$. Umformuliert:
$\forall n \in \mathbb{N} \, \exists L_n \subset K : |L_n| < 1/n$ und $\forall i \in I : L_n \not\subset U_i$
Demgemäß können wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Menge $L_n \subset K$ mit $|L_n| < 1/n$ wählen. Aus jeder der Mengen L_n wählen wir dann noch ein Element x_n. Die Folge (x_n) besitzt lt. Voraussetzung einen Häufungspunkt *a*, der Element einer Menget U_{i_0} der Ausgangsüberdeckung sein muß. Da U_{i_0} offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(a) \subset U_{i_0}$. In $U_{\epsilon/2}(a)$ gibt es unendlich viele Folgenglieder und daher ein Folgenglied x_n mit $1/n < \epsilon/2$. Weil $x_n \in L_n$ und $|L_n| < 1/n < \epsilon/2$ folgern wir $L_n \subset U_\epsilon(a) \subset U_{i_0}$, im Widerspruch zur Annahme.

Beweis von Hilfssatz 2:
Nehmen wir an, es für ein ε>0 keine endliche Überdeckung von K durch ε-Kugeln.

Wir definieren unter dieser Voraussetzung rekursiv eine Folge, die einen Häufungspunkt haben muß andererseits aber keinen haben kann.

Dazu wählen wir einen beliebigen Punkt $x_1 \in K$ und setzen $U_1 := U_\epsilon(x_1)$

Seien $x_1, \ldots, x_n \in K$ bereits gewählt, sowie die Kugeln $U_n = U_\epsilon(x_n)$.
Es muß nun einen Punkt x_{n+1} außerhalb $U_1 \cup \ldots \cup U_n$ geben (sonst hätten wir ja eine endliche Überdeckung durch ε-Kugeln, und wir setzen dazu auch wieder $U_{n+1} := U_\epsilon(x_{n+1})$.

Ist dann $m>n$, so haben wir mit dieser Konstruktion $x_m \notin U_1 \cup \ldots \cup U_n \cup \ldots \cup U_{m-1}$, also insbesondere $x_m \notin U_n$ und daher $d(x_n, x_m) \geq \epsilon$. Hätte die Folge (x_n) einen Häufungspunkt a, so lägen in $U_{\epsilon/2}(a)$ unendlich viele Folgenglieder. Da zwei verschiedene Folgenglieder aber einen Abstand ≥ ε besitzen, ist dies nicht möglich.

Andererseits war vorausgesetzt, daß jede Folge in K einen Häufungspunkt besitzt, und damit haben wir den gewünschten Widerspruch zur Annahme.

Zum Schluß noch der **Satz:**

Ein metrischer Raum ist genau dann kompakt, wenn er vollständig und total beschränkt ist.

Man erinnere sich: in einem vollständigen metrischen Raum konvergiert jede Cauchyfolge.

Die eine Implikation in der Aussage des Satzes ist einfach:
Ist K kompakt, so legt man um jeden Punkt von K eine ε-Kugel, hat damit eine offene Überdeckung und somit eine endliche Teilüberdeckung, insgesamt also eine endliche Überdeckung durch ε-Kugeln: K ist also total beschränkt.

Weil K kompakt ist, ist K auch folgenkompakt. Eine Cauchyfolge muß also einen Häufungspunkt besitzen, der dann auch ihr Grenzwert ist.

Für die umgekehrte Implikation nehmen wir an, K sei vollständig und total beschränkt. Wenn wir zeigen können, daß K folgenkompakt ist, sind wir auf Grund des vorigen Satzes fertig.

Gehen wir also aus von einer beliebigen Folge (x_n) in K . Weil K total beschränkt ist, gibt es eine endliche Überdeckung von K durch offene Kugeln vom Radius 1. In mindestens einer dieser Kugeln, sagen wir in U_1 , müssen unendlich viele Folgenglieder liegen. Sei also $I_1 \subset \mathbb{N}$ die unendliche Menge der Indizes, für die die zugehörigen Folgenglieder in U_1 liegen, also $n \in I_1 \rightarrow x_n \in U_1$.

Jetzt ein Rekursionsschritt: es seien bereits unendliche Mengen $I_n \subset I_{n-1} \subset \ldots \subset I_1 \subset \mathbb{N}$ definiert sowie offene Kugeln $U_n, U_{n-1} \ldots U_1$,wobei U_k den Radius $1/k$ besitze sowie gelte: $n \in I_k \rightarrow x_n \in U_k$.

Wählen wir jetzt eine endliche Überdeckung von K durch Kugeln mit Radius $1/(n+1)$, so müssen von den unendlich vielen Folgenglieder x_m mit $m \in I_n$ wiederum unendlich viele in einer dieser Kugeln liegen, die wir U_{n+1} nennen. Wir setzen dann $I_{n+1} := \{ m \in I_n \mid x_m \in U_{n+1} \}$.

Diese rekursive Konstruktion liefert also fallende Folge unendlicher Mengen I_n sowie eine Folge von offenen Kugeln U_n mit Radius $1/n$, also mit Durchmesser $2/n$, wobei noch gilt
$\forall n \in \mathbb{N} \forall m \in I_n\colon\ x_m \in U_n$

Wir wählen jetzt aus jeder der Mengen I_n ein Element m_n und setzen $y_n := x_{m_n}$.

Wir zeigen gleich, daß diese neue Folge (y_n) eine Cauchyfolge ist. Das war das Ziel der obigen Konstruktion.
Lt. Voraussetzung hat dann also die Folge (y_n) einen Grenzwert. Da sie eine Teilfolge der Ausgangsfolge (x_n) ist, ist dieser Grenzwert Häufungspunkt der Ausgangsfolge.

Damit wäre dann gezeigt, daß eine beliebige Folge in K einen Häufungspunkt besitzt und K daher folgenkompakt ist.

Bleibt also zu zeigen, daß (y_n) Cauchyfolge ist:

Sei $\varepsilon>0$ vorgegeben, und $n_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt daß $1/n_0 < \epsilon/2$.
Sind dann $k, n \geq n_0$, so gilt $y_k = x_{m_k}$ und $y_n = x_{m_n}$, wobei $m_k \in I_k$ und $m_n \in I_n$, somit $m_k, m_n \in I_{n_0}$.
Also $x_{m_k}, x_{m_n} \in U_{n_0}$, also folgt $\mathrm{d}(y_k, y_n) = \mathrm{d}(x_{m_k}, x_{m_n}) \leq 2/n_0 < \epsilon$: fertig.