Topologie, SS2015
M. Hortmann

Graph abgeschlossen und Wertebereich kompakt folgt Abbildung stetig

Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen, *Y* sei kompakter Hausdorffraum.

Behauptung: Ist Graph(*f*) abgeschlossen in $X \times Y$, so ist *f* stetig.

Zu zeigen ist: Urbilder abgeschlossener Mengen in *Y* sind abgeschlossen in *X*.

Sei also $B \subset Y$ eine abgeschlossene Menge, die als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raums *Y* auch selbst kompakt ist. Zu zeigen ist $f^{-1}(B)$ ist abgeschlossen in *X*.

Sei nun $x_0 \notin f^{-1}(B)$ beliebig, also $f(x_0) \notin B$. Wenn wir eine offene Umgebung $U(x_0)$ mit $U(x_0) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ konstruieren können, muß demnach $f^{-1}(B)$ selbst abgeschlossen sein, und wir wären fertig.

Jedenfalls gilt für alle $y \in B$: $(x_0, y) \notin \mathrm{Graph}(f)$. Wäre nämlich $(x_0, y) \in \mathrm{Graph}(f)$, so hätte man $y = f(x_0)$, also $f(x_0) \in B$, also $x_0 \in f^{-1}(B)$. Alle Punkte (x_0, y) mit $y \in B$ liegen demnach außerhalb der abgeschlossenen Teilmenge Graph(*f*). Damit gibt es für jedes $y \in B$ ein offenes Rechteck $U_y(x_0) \times V(y)$, welches die Menge $\mathrm{Graph}(f)$ nicht schneidet. Weil die $V(y)$ offenbar eine offene Überdeckung der kompakten Menge *B* bilden, reichen endlich viele $V(y_1) \ldots V(y_n)$ aus, um *B* zu überdecken. Dann können wir setzen: $U(x_0) := \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}(x_0)$, und diese Menge ist als endlicher Durchschnitt offener Umgebungen von x_0 selbst eine offene Umgebung von x_0 .

Offenbar gilt dann $U(x_0) \times B \subset \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i} \right) \times \left(\bigcup_{i=1}^{n} V(y_i) \right) \subset \bigcup_{y \in B} \left(U_y(x_0) \times V(y) \right)$, und weil die Menge rechts mit der Menge $\mathrm{Graph}(f)$ leeren Schnitt hat, gilt dies auch für $U(x_0) \times B$.

Für keinen Punkt $x \in U(x_0)$ ist also $f(x) \in B$, d.h. $U(x_0) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. Damit sind wir fertig.