Topologie, SS2015
M. Hortmann

Satz: Endliche abgeschlossene Intervalle in $\mathbb{R}$ sind kompakt.

Beweis:
Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b, (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von [a,b].
Es ist zu zeigen: diese Überdeckung besitzt eine endliche Teilüberdeckung (ETÜ).

Definiere dazu $M := \{x \in [a, b] \mid [a, x] \text{ besitzt eine ETÜ}\}$
Weil $a \in M$ gilt $M \neq \emptyset$. Zu zeigen ist: $b \in M$.

Sei c:=sup M. Offenbar ist $c \in [a, b]$.

Zunächst soll gezeigt werden, daß $c \in M$.
Für c=a ist die Aussage $c \in M$ trivial.
Ist dagegen a<c, so gibt es jedenfalls ein $i_0 \in I$ mit $c \in U_{i_0} =: U$. Also gibt es ein $\epsilon > 0$ so daß $]c - \epsilon, c + \epsilon[\subset U$. Ist jetzt $d \in]c - \epsilon, c[$, so kann d nicht obere Schranke von M sein, denn c ist die kleinste obere Schranke. Es gibt also Elemente von M, die größer als d sind; andererseits sind alle Element von M kleinergleich c. Das heißt, daß es im Intervall $]d, c] \subset U$ ein Element $x \in M$ gibt.
Es ist $[a, c] = [a, x] \cup]d, c]$, d.h. zu der ETÜ von [a,x] kommt womöglich noch U hinzu um eine ETÜ von [a,c] zu bilden.

Ähnlich zeigen wir jetzt, daß c<b nicht möglich ist, so daß sich $c = b$ und damit $b \in M$ ergibt:
Annahme also: c<b.
Wieder haben wir $c \in U$ für eine Menge U aus der gegebenen Überdeckung von [a,b]. Damit gibt es auch wieder ein $\epsilon > 0$ so daß $[c, c + \epsilon[\subset U \cap [a, b]$. Weil, wie eben gezeigt, [a,c] eine ETÜ besitzt, gilt dasselbe auch für $[a, c + \epsilon/2] = [a, c] \cup [c, c + \epsilon/2]$, denn zu einer ETÜ von [a,c] läßt sich ggf. die Menge U hinzunehmen. Damit wäre aber $c + \epsilon/2 \in M$, im Widerspruch zur Konstruktion von c.