Topologie, SS2015
M. Hortmann

Klausur MZH 1090 22.7.2015

Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
Dadurch ist es möglich, einfache Wissens- und Definitionsfragen zu stellen.

Bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen.
Kreuzen Sie in der Zeile "bearbeitet" die Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben.

Die Klausuraufgaben selbst können Sie mitnehmen. Sie werden aber auch auf Studip veröffentlicht.

	Name:																	**Matrikelnummer:**							
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	**Summe**
Punkte	1	1	2	1	2	2	2	1	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	1	2	1	2	36
bearbeitet																									

Mengenlehre

1. Wann nennt man eine Menge unendlich[1]? (1P)
2. Geben Sie zwei äquivalente Bedingungen, daß eine Menge A mächtiger ist als eine Menge B.(1P) (Die Bedingungen benutzen die Begriffe "injektiv" und "surjektiv".)
3. Benutzen Sie das Fundierungsaxiom um zu zeigen, daß für jede Menge X gilt: $X \notin X$. (2P)

Topologische Grundlagen

4. Sei $(M, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $\mathscr{B} \subset \mathcal{O}$. Wann heißt $\mathscr{B}$ Basis der Topologie $\mathcal{O}$? (1P)
5. Zeigen Sie, daß die offenen Kugeln in einem metrischen Raum Basis einer Topologie[2] sind. (2P)
6. Zeigen Sie, daß in einem Hausdorffraum jede endliche Menge abgeschlossen ist. (2P)
7. Sei M ein topologischer Raum. Zeigen Sie: enthält eine Teilmenge $A \subset M$ alle ihre Häufungspunkte, so ist sie abgeschlossen. (2P)

Stetige Abbildungen

8. Sei $f: M \to N$ eine Abbildung zwischen top. Räumen, sei $x_0 \in M$. Wann heißt f stetig in x_0 ? (1P)
9. Eine Abb. $f: M \to N$ zwischen top. Räumen ist lt. Definition stetig, wenn Urbildmengen offener Teilmengen von N offen in M sind. Folgern Sie, daß f dann stetig in jedem Punkt $x_0 \in M$ ist. (2P)
10. Sei (M, d) ein metrischer Raum und sei $x_0 \in M$. Zeigen Sie, daß die durch $x \mapsto d(x, x_0)$ gegebene Abbildung $M \to \mathbb{R}$ stetig ist. (2P)
11. Seien X,Y topologische Räume. Betrachten Sie die Projektion $X \times Y \to X$, $(x, y) \mapsto x$. Warum ist diese stetig, wenn Sie auf $X \times Y$ die Produkttopologie wählen? (2P)
12. Was bedeutet der Begriff "Finaltopologie"? (1P)

Kompaktheit

13. Welches sind die kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$? (Ohne Beweis) (1P)
14. Zeigen Sie: eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Hausdorffraums ist kompakt. (2P)
15. Warum ist der projektive Raum $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ mit seiner üblichen Topologie kompakt[3]? (2P)

Zusammenhang

16. Definieren Sie: "zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raums". (1P)
17. Warum ist eine offene Kugel im $\mathbb{R}^n$ zusammenhängend? (1P)
18. Definieren Sie den Begriff "Zusammenhangskomponente eines topologischen Raums". (1P)
19. Welches sind die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$? (Ohne Beweis) (1P)

Čech-Kohomologie

20. Sei M ein topologischer Raum und $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M.
Betrachten Sie die Abbildungen $\check{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta^0} \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta^1} \check{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$, und zeigen Sie durch direkte Rechnung, daß $\delta^1 \circ \delta^0 = 0$. (2P)

1 Bitte nicht: "wenn sie nicht endlich ist" :-) und auch nicht die Menge der natürlichen Zahlen benutzen.
2 Diese Topologie ist die durch die Metrik erzeugte Topologie.
3 Sie dürfen voraussetzen, daß der projektive Raum in dieser Topologie hausdorffsch ist.

Homotopie

21. Wann heißt eine Teilmenge eines topologischen Raums "einfach zusammenhängend"? (1P)
22. Wie ist die Homotopiegruppe $\pi_1(X, x_0)$ definiert, d.h. wie die dieser Gruppe zugrundeliegende Menge, und wie die Gruppenoperation? Wie erhält man das zu einer Homotopieklasse inverse Element? (2P)
23. Geben Sie ein Beispiel für eine diskrete Überlagerung von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, bei der die Fasern fünfelementig sind (ohne Beweis). (1P)
24. Gegeben sei eine diskrete Überlagerung $(E, e_0) \xrightarrow{\pi} (B, b_0)$. Beschreiben Sie die Operation $\phi: \pi_1(B, b_0) \rightarrow \pi^{-1}(\{b_0\})$ und geben Sie (ohne Beweis) Bedingungen an, unter denen diese Abbildung bijektiv ist. (2P)