Topologie, SS2015
M. Hortmann

Stoffsammlung und Testfragen für die Klausur

7. Homotopie

Wann heißen zwei Abbildungen zwischen topologischen Räumen homotop?
Wann sind zwei Wege weghomotop? Geben Sie Beispiele!

Wie ist die Homotopiegruppe $\pi_1(X, x_0)$ definiert, wie die Gruppenoperation? Welches ist das neutrale Element dieser Gruppe? Beweis?

Wann heißt eine stetige Abbildung $E \to B$ diskrete Überlagerung?
Warum ist bei einer diskreten Überlagerung die Faser über einem Punkt $x_0 \in B$ eine diskrete Teilmenge des Überlagerungsraums *E*?

Geben Sie ein Beispiel für eine einfach zusammenhängende diskrete Überlagerung des Kreises S^1.
Geben Sie ein Beispiel für eine einfach zshgde diskrete Überlagerung einer gelochten Ebene.

Geben Sie ein Beispiel für eine diskrete Überlagerung des Kreises S^1, bei der die Fasern dreielementig sind. Geben Sie ein Beispiel für eine diskrete Überlagerung einer gelochten Ebene, bei der die Fasern dreielementig sind.

Wie können Sie den Torus als Orbitraum einer Gruppenoperation auf $\mathbb{R}^2$ darstellen?

Wie operiert die Homotopiegruppe $\pi_1(B, b_0)$ bei einer diskreten Überlagerung $(E, e_0) \to (B, b_0)$ auf der Faser E_{b_0}? Wieso führt diese Operation zu einer Abbildung $\phi : \pi_1(B, b_0) \to E_{b_0}$? Welche Bedingung an *B* brauchen Sie, um zu folgern, daß diese Abbildung surjektiv (injektiv) ist.
Warum sind in diesem Zusammenhang einfach zusammenhängende diskrete Überlagerungen eines Raums besonders interessant?

Wie beweist man, daß $\pi_1(S^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$?
Wie läßt sich zeigen, daß die Homotopiegruppe eines Torus (isomorph zu) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist?

Geben Sie eine Retraktion der abgeschlossenen Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ auf die Sphäre S^2 an.
Sei $x_0 \in S^2$. Warum ist $\pi_1(S^2, x_0)$ trivial? Warum ist S^2 einfach zusammenhängend? Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Warum ist jede stetige Abbildung $U \to S^1$ nullhomotop? Warum ist *U* einfach zusammenhängend?

Sei $\varphi : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen mit $\varphi(x_0) = y_0$.
Geben Sie die Definiton der dadurch induzierten Abbildung $\pi_1 : (X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.
γ_1, γ_2 seien homotope geschlossene Wege in *X* mit Anfangs- und Endpunkt x_0. Wieso sind dann $\varphi \circ \gamma_1$ und $\varphi \circ \gamma_2$ weghomotop?

Wie ist das freie Produkt zweier Gruppen definiert?
$\varphi_1 : G_1 \to H$ und $\varphi_2 : G_2 \to H$ seien Gruppenhomomorphismen.
Wie ist der induzierte Homomorphismus $\varphi_1 * \varphi_2 : G_1 * G_2 \to H$ definiert?

Formulieren Sie den Satz von Seifert-v.Kampen.
Wieso kann man mit diesem Satz die Homotopiegruppe einer zweifach gelochten Ebene berechnen?