Topologie, SS2015
M. Hortmann

Stoffsammlung und Testfragen für die Klausur

Die Klausur findet am Mittwoch 22.7. von 8:45-12:00 Uhr statt.
Der genaue Ort wird noch bekanntgegeben.

Es werden keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
Dadurch ist es möglich, auch recht einfache Wissens- und Definitionsfragen zu stellen.

Die folgende Liste enthält Fragen zum bisher behandelten Stoff. Sie wird in den kommenden Tagen und bis Ende des Semesters noch ergänzt. Diskutieren Sie darüber im Tutorium und ggf. in der Vorlesung. In der Klausur könnten diese oder ähnliche Fragen vorkommen. Im Wesentlichen wird Wissen abgefragt, natürlich muß man ab und zu auch überlegen.

1. Mengenlehre

Wann nennt man eine Menge unendlich?
Wann heißen zwei Mengen gleichmächtig?
Was ist die Russellsche Antinomie? Wie wird sie in der axiomatischen Mengenlehre vermieden?
Warum ist die Menge der reellen Zahlen nicht abzählbar?
Wie lautet das Fundierungsaxiom?
Wie verhindert das Fundierungsaxiom die Existenz von zwei Mengen x, y mit $x \in y$ und $y \in x$?
Wie definiert man den Begriff Ordinalzahl?
Was ist das Auswahlaxiom?
Was ist eine Wohlordnung?
Wie lautet der zum Auswahlaxiom äquivalente Wohlordnungssatz?

2. Topologische Grundlagen

Wie ist der Begriff "Topologischer Raum" definiert?
Was ist eine Basis eines Topologischen Raums?
Was ist eine Subbasis?

Geben Sie eine Subbasis für die gewöhnliche Topologie auf den reellen Zahlen an, welche keine Basis ist.

Wie ist die Produkttopologie auf dem Produkt zweier Mengen definiert?
Wie ist die Produkttopologie auf dem Produkt unendlich vieler Mengen definiert?

Was ist die diskrete Topologie auf einer Menge?
Geben Sie eine Metrik an, welche die diskrete Topologie induziert.

Geben Sie eine Basis für die durch eine Metrik definierte Topologie an.
Zeigen Sie, daß die offenen Kugeln mit rationalem Radius eine Basis für die durch die Metrik induzierte Topologie eines metrischen Raums bilden.

Was ist die Relativtopologie auf einer Teilmenge eines topologischen Raums?

Warum ist der Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen i.a. nicht offen?
Geben Sie ein Beispiel für einen topologischen Raum, in dem keine einpunktige Menge abgeschlossen ist.

Warum ist eine Teilmenge eines topologischen Raums genau dann abgeschlossen, wenn sie all ihre Häufungspunkte enthält?

Warum ist in einem Hausdorffraum jede einpunktige Menge abgeschlossen?
Definieren Sie den p-Betrag auf $\mathbb{Q}$ und die dadurch gegebene Metrik.

Zeigen Sie, daß bei einer Ultrametrik, also einer Metrik, für die die ultrametrische Ungleichung gilt, bei offenen Kugeln mit nicht-leerem Schnitt eine Kugel die andere als Teilmenge enthält.

3. Stetige Abbildungen

Wann ist eine Abbildung zwischen topologischen Räumen stetig?
Was bedeutet: "Stetigkeit in einem Punkt"?

Geben Sie die ε-δ-Definiton von Stetigkeit für eine Abbildung zwischen metrischen Räumen.
.
Sei $C \subset M$ Teilmenge eines metrischen Raums M. Für $x \in M$ definiere man $d(x, C) := \inf_{y \in C} \mathrm{d}(x, y)$.
Man zeige: die Funktion $M \to \mathbb{R}, x \mapsto d(x, C)$ ist stetig.

Geben Sie ein Beispiel für eine bijektive stetige Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen, welche kein Homöomorphismus ist.

Warum ist eine konstante Abbildung stetig?
Was bedeutet der Begriff Initialtopologie?
Was bedeutet der Begriff Finaltopologie?

Wie ist der projektive Raum $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ definiert?
Welche Topologie wird üblicherweise auf ihm betrachtet?
Geben Sie einen von der Identität verschiedenen Homöomorphismus $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ an.

Seien X, Y topologische Räume, $X \times Y \to X$ sei die Projektion auf den ersten Faktor. Warum ist diese Abbildung stetig, wenn $X \times Y$ die Produkttopologie trägt?
Sei $a \in Y$. Warum ist die durch $x \mapsto (x, a)$ gegebene Abbildung $X \to X \times Y$ stetig?

Ausgehend von der Stetigkeit der Multiplikation $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zeigen Sie:
Sind stetige Abbildungen $f, g : M \to \mathbb{R}$ gegeben, so ist auch die Abbildung $h := f \cdot g$ stetig.

4. Kompaktheit

Geben Sie eine Definition des Begriffs kompakt.
Was bedeutet "lokalkompakt"?
Wieso ist der Raum $\mathbb{R}^n$ nicht kompakt, aber lokalkompakt?
Geben Sie eine Charakterisierung der kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ (Heine Borel).
Fakt: Produkte kompakter Mengen sind kompakt in der Produkttopologie.
Wieso sind kompakte Teilmengen eines metrischen Raums beschränkt?
Warum sind kompakte Teilmengen eines Hausdorffraums abgeschlossen?
Beweisen Sie: abgeschlossene Teilmengen eines kompakten Hausdorffraums sind kompakt.
Geben Sie ein Beispiel für eine abzählbar unendliche kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

Warum bilden stetige Abbildungen kompakte Mengen auf kompakte Mengen ab?
Warum ist der projektive Raum $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ kompakt?

Warum sind stetige Funktionen auf kompakten Räumen beschränkt?

5. Zusammenhang
Geben Sie die Definition von "zusammenhängend".
Was bedeutet "lokal zusammenhängend"?
Was bedeutet "wegzusammenhängend"? Was bedeutet "lokal wegzusammenhängend".
Was ist eine Zusammenhangskomponente eines Raums?
Geben Sie ein Beispiel eines topologischen Raums mit überabzählbar vielen Zusammenhangskomponenten.

Welche Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind zusammenhängend?

Wieso sind Bilder von zusammenhängenden Mengen unter stetigen Abbildungen zusammenhängend? Was hat das mit dem Zwischenwertsatz zu tun?

Zeigen Sie: Ist eine nichtleere Teilmenge $T \subset M$ eines zusammenhängenden Raums M gleichzeitig offen und abgeschlossen, so ist T=M.

Wann sind wegzusammenhängende Räume zusammenhängend?
Wieso ist der offene Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$ zusammenhängend?
Wieso ist Kreis(rand) S^1 zusammenhängend?

Was bedeutet: "Einfach zusammenhängend"?
Wie ist die Homotopiegruppe eines Raums definiert?

5. Räume stetiger Funktionen
$\mathscr{C}(K)$ sei der Raum der reellwertigen stetigen Funktionen auf einer kompakten Teilmenge K des $\mathbb{R}^n$. Geben Sie eine Norm auf diesem $\mathbb{R}$ -Vektorraum an, die ihn zu einem Banachraum macht.

Wie kann man auf dem Raum $\mathscr{C}(U)$ der reellwertigen stetigen Funktionen auf einer offenen Teilmenge U des $\mathbb{R}^n$ Konvergenz von Funktionenfolgen definieren, wie eine Topologie?

6. Čech-Kohomologie
Ist M ein topologischer Raum und $\mathcal{U}=(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung. Wie sind die Kokettenräume $\check{C}^k(\mathcal{U},\mathbb{Z})$ definiert, wie die Korandoperatoren $\delta^k:\check{C}^k(\mathcal{U},\mathbb{Z})\rightarrow\check{C}^{k+1}(\mathcal{U},\mathbb{Z})$?

Zeigen Sie durch direkte Rechnung, daß $\partial^1\circ\partial^0=0$.
Wie ist die Čechsche-Kohomologiegruppe $\check{H}^k(\mathcal{U},\mathbb{Z})$ definiert?

Sei $\mathcal{V}=(V_j)_{j\in J}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}=(U_i)_{i\in I}$ und $\sigma: J\rightarrow I$ eine Verfeinerungsabbildung, so daß also $\forall\, j\in J:\ V_j\subset U_{\sigma(j)}$. Geben Sie die Definition der zugehörigen Homomorphismen $\sigma^k:\check{C}^k(\mathcal{U},\mathbb{Z})\rightarrow\check{C}^k(\mathcal{V},\mathbb{Z})$ sowie der zugehörigen Homomorphismen $\check{H}^k(\mathcal{U},\mathbb{Z})\rightarrow\check{H}^k(\mathcal{V},\mathbb{Z})$.