Topologie, SS2015
M. Hortmann

Blatt 11

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen						
1	2	3	4a	b	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	3 Punkte=100%	

Aufgabe 1

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, $\begin{pmatrix} t \\ r \end{pmatrix} \mapsto r\begin{pmatrix} \cos 2\pi t \\ \sin 2\pi t \end{pmatrix}$ ist eine Überlagerungsabbildung.

Sei $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ gegeben durch $\gamma(t):=(1+t)\begin{pmatrix} \cos 2\pi t \\ \sin 2\pi t \end{pmatrix}$. Man gebe eine Formel für diejenige Liftung $\overline{\gamma}:[0,1]\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, für die gilt: $\overline{\gamma}(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2

$\pi: E\to B$ sei eine Überlagerungsabbildung.
Man zeige: Ist *B* einfach zusammenhängend, so ist π ein Homömorphismus.

Aufgabe 3

In $B=\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ seien die drei Wege $\gamma_1(t):=(\bar{t},\bar{0})$, $\gamma_2(t):=(\bar{0},\bar{t})$, und $\gamma_3(t):=(\bar{t},\bar{t})$ gegeben.
Man finde Überlagerungen von *B*, welche sämtlich zweielementige Fasern besitzen, so daß die Lifts von jeweils einem der obigen Wege geschlossen sind, die der beiden anderen aber nicht.

Aufgabe 4

Man erhält auf $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ durch $(a,b)*(c,d):=(a+(-1)^b c, b+d)$ eine Gruppenoperation mit neutralem Element $(0,0)$. Die so entstandene Gruppe ist offenbar nichtkommutativ. $G:=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ operiert nach derselben Formel auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, man setze dazu für $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ und $(c,d)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ebenfalls $(a,b)*(c,d):=(a+(-1)^b c, b+d)$.

a) Betrachten Sie das abgeschlossene Einheitsquadrat in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Welche Punkte sind darin äquivalent bezüglich der Operation von *G*? Gibt es Orbits, die das abgeschlossene Einheitsquadrat nicht schneiden? Machen Sie eine Skizze des Orbits von (¾, ¾) im abgeschlossenen Quadrat $[-3,3]\times[-3,3]$.

b) Die Gruppenoperation von *G* auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ führt zur zugehörigen Quotiententopologie auf $K:=\mathbb{R}\times\mathbb{R}/G$. Geben Sie konkret zwei geschlossene Wege γ_1, γ_2 mit Anfangspunkt $x_0:=\overline{(0,0)}$ in *K* an, für die $\gamma_1 * \gamma_2$ nicht homotop zu $\gamma_2 * \gamma_1$ ist, möglichst mit Beweis.